

Hervé Le Dret

Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires



Table des matières

1	Rappels d'analyse réelle et fonctionnelle	1
1.1	Intégration et théorèmes de convergence de Lebesgue	1
1.2	La convolution	4
1.3	Les distributions	8
1.4	Les espaces de Sobolev	10
1.5	Dualité et convergences faibles	15
1.6	Topologies faible et faible-étoile	18
1.7	Formulations variationnelles et leur interprétation	22
1.8	Un peu de théorie spectrale	26
1.9	Appendice : topologies de \mathcal{D} et \mathcal{D}'	28
2	Théorèmes de point fixe et applications	41
2.1	Le théorème de point fixe de Brouwer	41
2.2	Les théorèmes de point fixe de Schauder	48
2.3	Résolution d'un problème modèle par une méthode de point fixe	54
2.4	Exercices du chapitre 2	59
3	Les opérateurs de superposition	61
3.1	Les opérateurs de superposition dans $L^p(\Omega)$	61
3.2	Les mesures de Young	64
3.3	Les opérateurs de superposition dans $W^{1,p}(\Omega)$	69
3.4	Opérateurs de superposition et trace au bord	79
3.5	Exercices du chapitre 3	80
4	La méthode de Galerkin	83
4.1	Résolution du problème modèle par la méthode de Galerkin	83
4.2	Un problème voisin de la mécanique des fluides	86
4.3	Exercices du chapitre 4	97

5	Principe du maximum, régularité elliptique et applications	99
5.1	Le principe du maximum fort	99
5.2	Le principe du maximum faible	107
5.3	Résultats de régularité elliptique	109
5.4	La méthode des sur- et sous-solutions	117
5.5	Exercices du chapitre 5	121
6	Calcul des variations et problèmes quasi-linéaires	125
6.1	Rappels d'analyse convexe	125
6.2	Application aux problèmes aux limites scalaires quasi-linéaires	128
6.3	Calcul des variations dans le cas vectoriel, quasi-convexité	132
6.4	Condition nécessaire et condition suffisante de quasi-convexité	137
6.5	Annexe: démonstrations des résultats de semi-continuité inférieure	142
6.6	Exercices du chapitre 6	154
7	Calcul des variations et points critiques	161
7.1	Pourquoi rechercher des points critiques ?	161
7.2	La condition de Palais-Smale	164
7.3	Le lemme d'Ekeland	168
7.4	Le lemme de déformation	175
7.5	Principe du min-max et théorème du col	181
7.6	Exercices du chapitre 7	191
8	Opérateurs monotones et inéquations variationnelles	195
8.1	Opérateurs monotones, définitions et premières propriétés	195
8.2	Exemples d'opérateurs monotones	197
8.3	Inéquations variationnelles	199
8.4	Exemples d'inéquations variationnelles	204
8.5	Opérateurs pseudo-monotones	206
8.6	Exemples, les opérateurs de Leray-Lions	210
8.7	Exercices du chapitre 8	213
	Bibliographie	217
	Index	221