



Éléments de théorie des graphes

Alain Bretto, Alain Faisant, François Hennecart

Bretto, Alain

Faisant, Alain

Hennecart, François

Springer, Paris

Iris

ISBN: 978-2-8178-0280-0

Table des Matières

Éléments de théorie des graphes

Avant-propos	vii
À propos des auteurs	xiii
1 Concepts fondamentaux	1
1.1 Graphes non orientés	1
1.1.1 Degré	6
1.1.2 Chaîne et cycle	7
1.1.3 Sous-graphes	9
1.2 Décomposition connexe	13
1.3 Graphes orientés	14
1.4 Graphes simples	17
1.5 Opérations sur les graphes	20
1.6 Représentations algorithmiques des graphes	20
1.7 Algorithmes et théorie de la complexité	22
1.7.1 Algorithme	22
1.7.2 Complexité en temps d'un algorithme	24
1.7.3 Classes de complexité	25
1.8 Définition d'un graphe à partir de la fonction d'incidence	26
1.9 Isomorphismes de graphes. Groupes d'automorphismes	27
1.10 Compléments : quelques structures de base	32
2 Quelques graphes remarquables	35
2.1 Graphes bipartis	35
2.2 Arbres et arborescences	39
2.2.1 Arbres	39
2.2.2 Arborescences	45
2.3 Digraphes sans circuit	48
2.4 Graphes eulériens et graphes hamiltoniens	50
2.4.1 Graphes eulériens	50
2.4.2 Graphes hamiltoniens	55
3 (Di)graphes et structures de données	61
3.1 Arbres et arborescences : le retour	62
3.1.1 Représentation d'un arbre ou d'une arborescence sous forme fils-frère	63

3.1.2 Arbres et arborescences binaires	67
3.1.3 Arbres et arborescences binaires de recherche	68
3.1.4 Arbres et arborescences de priorité, les tas	74
3.1.5 Arbres AVL	79
3.1.6 Propriétés des arbres binaires	84
3.2 Complexité en temps des algorithmes sur les arbres binaires	85
3.3 Graphes : le retour	87
3.3.1 Représentation par matrice d'adjacence	87
3.3.2 Représentation par tableau des listes de successeurs	87
3.3.3 Remarques sur la complexité de ces représentations	88
3.3.4 Parcours d'un (di)graphe	88
3.4 Compléments	91
3.4.1 Types de données simples	91
3.4.2 Fonctions	92
3.4.3 Passage des paramètres dans une fonction	93
3.4.4 Structures linéaires	94
4 Connexité et flots dans les réseaux	99
4.1 Sommet-connexité et arête-connexité	99
4.2 Graphes 2-sommet-connexes	103
4.3 Graphes 2-arête-connexes	111
4.4 Flots dans un réseau	113
4.4.1 Définitions	113
4.4.2 Le théorème de Ford et Fulkerson	117
4.5 Applications des flots dans un réseau	123
4.6 Compléments : lois de Kirchhoff	128
5 Graphes planaires	131
5.1 Dessins	131
5.2 Graphes planaires	133
5.2.1 Rappels de topologie de \mathbb{R}^n	133
5.2.2 Lignes polygonales	134
5.2.3 Graphes plongés	144
5.2.4 Faces	145
5.2.5 La formule d'Euler	148
5.2.6 Graphes planaires 2-connexes	154
5.3 Comparaison des plongements	155
5.4 Le théorème de Kuratowski	158
5.5 Graphe dual	161
5.6 Croisements, épaisseur et genre d'un graphe	165
5.6.1 Croisements et épaisseur	165
5.6.2 Genre d'un graphe	166
5.7 Compléments de topologie et géométrie du plan	171
5.7.1 Éléments de topologie	171

5.7.2 Preuve du théorème de Jordan «polygonal»	175
6 Théorie algébrique	183
6.1 Matrices et graphes	183
6.1.1 Le cas orienté	190
6.1.2 Le cas non orienté	191
6.2 Espaces vectoriels et graphes	192
6.2.1 Cas des graphes orientés	192
6.2.2 Cas des graphes non orientés	196
6.3 Circulation et algèbre linéaire	198
6.4 Graphes planaires et algèbre linéaire	202
6.5 Compléments d'algèbre linéaire	206
6.5.1 Espaces vectoriels	206
6.5.2 Matrices	208
6.5.3 Produits scalaires	211
7 Coloration	213
7.1 Coloration des sommets	214
7.1.1 Propriétés générales	214
7.1.2 Le théorème de Brooks	219
7.2 Graphes planaires et cartes	222
7.3 Coloration des arêtes	227
7.4 Morphismes de graphes	232
7.4.1 Quotients de graphe	235
7.4.2 Morphismes et quotients de graphes simples	236
7.4.3 Morphismes et coloration	236
7.5 Graphes parfaits	238
7.6 Coloration par listes	242
8 Couplage et factorisation	245
8.1 Définitions et premières propriétés	245
8.2 Couplages dans les graphes bipartis	252
8.2.1 Le théorème de Hall	252
8.2.2 Réseau associé à un graphe biparti	254
8.2.3 Remarques algorithmiques	255
8.3 Couplages dans les graphes quelconques	256
8.4 Factorisation	263
8.5 Quelques applications des couplages	266
8.6 Généralisation de la notion de facteur	274
9 Automorphismes - Théorie spectrale	277
9.1 Groupes de permutations	277
9.2 Groupes d'automorphismes d'un graphe et line-graphe	279
9.2.1 Automorphismes, automorphismes d'arêtes	279
9.2.2 Étude de $\text{Ker } \text{AlphaGamma}$	283
9.2.3 Étude de $\text{Im } \text{AlphaGamma}$	283

9.3 Graphe de Cayley colorié	287
9.4 Le problème de König	290
9.5 Action de groupe	294
9.6 Graphes transitifs	298
9.7 Théorie spectrale des graphes	300
9.7.1 L'espace hermitien C^n	301
9.7.2 Spectre d'un graphe	304
9.7.3 Laplacien d'un graphe	313
9.8 Polynôme chromatique	321
10 Autres perspectives	327
10.1 Polynômes de Tutte	327
10.1.1 Propriétés de base	329
10.1.2 Polynôme de Tutte et polynôme chromatique	336
10.1.3 Polynôme de Tutte et arbres de recouvrement	338
10.1.4 Polynôme de Tutte et planarité	339
10.1.5 Autres applications	339
10.2 Théorie de Ramsey	340
10.3 Matroïdes	347
10.4 Hypergraphes	353
Bibliographie	357
Index	359
Symboles utilisés	367

