الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N^{o} Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Les Champs de Beltrami

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Préparé par : **Saad Azzem Khaled**
Saheb Azzeddine

Filière **: Mathématique** **Spécialité** **: Mathématique Fondamentale et appliquée**

Soutenu le 16 Juin 2013 devant le jury :

N. E. Hamri	Pr	C. U. Mila	Président
M. S. Abdelouahab	M. A. A	C. U. Mila	Examinateur
B. Boudjedaa	M. C. B	U. Jijel	Examinateur
T. Z . Boulmezaoud	M. C (HDR)	U. Versailles – France	Encadreur

Année universitaire : 2012/2013

Remerciement

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier **DIEU** pour nous avoir

Donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre sincère remerciement à tous

Ceux qui ont contribués, de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire

Nous remerciements très chaleureux sont adressé à Monsieur :

Mohammed Saleh Abed elouahab, Bojda Beder adine

Et notre encadreur Dr. Boulmezaod Taher Zamane

Nous adressons également nos vifs remerciement aux membres de jury qui ont

Bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail.

Nous adressons également mes remerciement chaleureux aux membres de

L'institut des science et de technologie.

Nous remerciements sons également adressés à tous les enseignants qui ont

Contribué à notre formation.

Table des matières

Introduction générale

Un champs de vecteurs B défini sur un domaine Ω est dit de Beltrami s'il satisfait le système

$$\textbf{rot } B \times B = 0, \tag{1}$$

$$\textbf{div } B = 0 \tag{2}$$

Depuis leur introduction par le mathématicien italien F.Beltrami en 1889 ces champs n'ont commencé à susciter une réelle attention qu'à partir des années cinquante avec les premiers travaux de Bjorgum et de Lundquist. cet intérêt s'est ensuite par leur apparition dans de nombreux domaines de la physique : en physique des plasmas, en astrophysique et plus particulièrement, en physique solaire, en mécanique des fluides - ils sont solutions de équation d' Euler stationnaire et en électromagnétisme. En pratique, la première équation, qui signifie que le champs est souvent remplacée par

$$\textbf{rot } B = \alpha(x)B \tag{3}$$

Ou α est une fonction qui dépend de la position $\mathbf{x}$.La nouvelle forme est qu'elle permet de classifier les champs de Beltrami,Les champs de Beltrami linéaire il s'agit du cas ou la fonction α est constante et ne dépend pas de la variable d'espace $\mathbf{x}$. Dans ce cas α peut être une constante connue ou inconnue. Champs de Beltrami non-linéaire il s'agit du cas dans α est une fonction qui dépend de $\mathbf{x}$

Le objectif de ce mémoire est de traiter les questions d'existence et d'unicité et de régularité de ces à ces champs dans un domaine tri-dimensionnels borné.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Sobolev

1.1.1 Espace $H^m(\Omega), H_0^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)$

Définition 1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ pour tout entier $\boldsymbol{K} \geq 0$ on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante*

$$H^m(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega), \partial^\alpha \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in N^d, \mid \alpha \mid \leqslant \boldsymbol{K}\} \tag{1.1}$$

Muni de la norme

$$\| u \|_{1,m} = (\sum_{|\alpha| \leqslant K} \| \partial^\alpha \boldsymbol{u} \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

et la semi norme

$$| u |_{1,\Omega} = (\sum_{|\alpha| = K} \| \partial^\alpha \boldsymbol{u} \|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

De façon équivalente, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et $H^{m+1}(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega), \nabla u \in H^m(\Omega)^d\}$. On définit l'espace $H_0^m(\Omega)$ comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

Remarque 1 *L'application $\boldsymbol{u} \rightarrow | u |_{1,\Omega}$ défini un semi norme sur $H^m(\Omega)$ et une norme sur $H_0^m(\Omega)$ d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrich voir Girault-Raviart page 3*

Proposition 1 *Les espaces $H^m(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$ ainsi définis sont des espaces de Hilbert et de plus , si Ω et lipschitzien, alors l'ensemble $C^\infty(\bar{\Omega})$ des fonction régulières jusqu'au bord de Ω est dense dans $H^m(\Omega)$*

Rappelons que $H^{-m}(\Omega)$ signifie le duale topologique de $H_0^m(\Omega)$.
Maintenant on va donner une propriété importante pour les éléments de $H^m(\Omega)$

s'appelle la trace,on peut la voir comme un prolongement jusqu'au bord mais elle est nécessaire poser que Ω est lipschitzienne

Théorème 1 *Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. L'application*

$$\gamma_0 : \boldsymbol{u} \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \mapsto \gamma_0(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\backslash \Gamma} \in L^2(\Gamma). \tag{1.4}$$

Se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ .On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu, l'application de trace .
L'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\Gamma)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et qui un Hilbert pour la norme

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega), \gamma_0 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}} \|\boldsymbol{u}\ \|_{H^1(\Omega)}$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : L^2(\Gamma) \mapsto H^1(\Omega)$, dit de relèvement qui vérifie

$$\gamma_0 o R_0 = Id_{\Gamma}.$$

Remarque 2 *La théorème précédente donnons la notion de trace pour les éléments de $H^1(\Omega)$, on peut prolonger la pour tout entier m. Les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'admet pas en général un prolongement jusqu'au bord*

Maintenant on va donner la formule de Green pour les éléments de $H^1(\Omega)$.

Lemme 1 *Soit Ω un ouvert borne de $\mathbb{R}^3$ avec un bord Lipschitz-continue Γ .*

- *pour $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans $H^1(\Omega)$et pour tout $1 \leq i \leq N$ on a*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}_i})dx = -\int_{\Omega}(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i})\boldsymbol{v}\ dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_i ds \tag{1.5}$$

- *soit $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega)$ on a :*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \boldsymbol{v}\ dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_i} v) n_i ds \tag{1.6}$$

telle que $\boldsymbol{n}_i$ sont les composants de vecteur $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}_1, .., \boldsymbol{n}_n)$ de plus on a

$$(\ \textbf{\textit{grad u}}\ ,\ \textbf{\textit{grad v}}\ ) = -(\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \int_{\Gamma} (\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}) \gamma_0 \boldsymbol{v}\ ds$$

1.2 Problème de Poisson avec condition de Dirichlet et de Neumann

Nous allons maintenant aborder la résolution de quelques équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre. plus précisément problème de poisson avec condition de Dirichlet et Neumann, pour étudier ces problèmes on va donner une théorème qui joue un rôle important dans E D P

Théorème 2 ***(Lax-Milgram)****[1] Soit H un espace de Hilbert réel,* $\boldsymbol{a}$ *une forme bilinéaire sur H et L forme linéaire. On suppose que*

1. $\boldsymbol{a}$ *est continue :*

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H, |\boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{u}\|_H \|\boldsymbol{v}\|_H. \tag{1.7}$$

2. $\boldsymbol{a}$ *est coercive : il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall \boldsymbol{u} \in H, \ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \alpha \|u\|_H^2 \tag{1.8}$$

.

3. $\boldsymbol{L}$ *est continue :*

$$\forall u \in H, |\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u})| \leq \|\boldsymbol{L}\| \|\boldsymbol{u}\|_H \tag{1.9}$$

Alors il existe un unique $\mathbf{u}$ *dans H qui vérifie*

$$\forall \boldsymbol{v} \in H, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \tag{1.10}$$

et celui-ci vérifie

$$\|\boldsymbol{u}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{L}\|}{\alpha} \tag{1.11}$$

Si de plus $\boldsymbol{a}$ *est symétrique, alors* $\mathbf{u}$ *est aussi l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle*

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}). \tag{1.12}$$

1.2.1 Problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet non homogène

Soit résoudre le problème suivent

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \ , \ \text{dans } \Omega \\ \quad \mathbf{u} = \ \mathbf{g}, \qquad \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases} \tag{1.13}$$

Où $\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_i^2}$ telle que $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$ et $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\mathit{\Gamma})$. La première étapes qui nous avons faire est la construction de la formulation faible de problème (1.13), soit $V = H_0^1(\Omega)$ et

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{grad}\ \mathbf{u}, \mathbf{grad}\ \mathbf{v}).$$

il est claire que **a** est continue dans $H_0^1(\Omega)^2$,l'application **a** est coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Comme l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\mathit{\Gamma})$ est l'espace des traces des éléments de $H^1(\Omega)$ alors on peut trouver une fonction $\mathbf{u}_0$ telle que $\mathbf{u}_0 = \mathbf{g}$;le problème
trouver $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega) \\ \mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) =< \mathbf{f}, \mathbf{v} > - \ \mathbf{a}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}), \forall\ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.14}$$

Comme **a** est continue. L'image de L'application $L\ :\ \mathbf{v}\ \ \rightarrow < \mathbf{f}, \mathbf{v} > - \ \mathbf{a}(u_0, \mathbf{v})$ est dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$. D'après la théorème de Lax Milgram le problème (1.14) admet un et une seule solution dans $H^1(\Omega)$, on prend $\mathbf{v} \in D(\Omega)$ dans la deuxième équation de système (1.14) on trouve :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - < \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< \mathbf{f}, \mathbf{v} > \forall \mathbf{v} \in D(\Omega)$$

alors **u** est vérifié

$$\begin{cases} \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \end{cases} \tag{1.15}$$

Inversement, tout solution de (1.15)est une solution de (1.14) et par la densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ donc (1.15) et (1.13) sont équivalent . l'application $L \rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ vers $H_0^1(\Omega)$ de plus on a

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \|_{1,\Omega} \leq C_2 \| L \|_{-1,\Omega}$$

Il est claire que

$$\| \mathbf{L} \|_{-1,\Omega} \leq \| \mathbf{f} \|_{-1,\Omega} + \| \mathbf{u}_0 \|_{1,\Omega}$$

Alors

$$\| \mathbf{u} \|_{1,\Omega} \leq C_3 \{ \| \mathbf{f} \|_{-1,\Omega} + \| \mathbf{u}_0 \|_{1,\Omega} \} \forall \mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega), \text{telle que } \mathbf{u}_0 = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma$$

Proposition 2 *([1]) Le problème (1.14) admet un et une seule solution* $\boldsymbol{u}$ *et il existe un constant* C *telle que vérifier*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \leq C\{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega} + \|\boldsymbol{g}\|_{\frac{1}{2},\Omega}\} \tag{1.16}$$

La régularité de la solution **u** de (1.14) est liée par les donnes **f** et **g**, et la théorème suivante explique la relation entre la régularité de **u** et **f**,**g**.

Théorème 3 *([1]) Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$ et avec un bord Γ de classe C^{k+1}. pour tout entier $k \geq 0$ les donnes de problème(1.13) Vérifiés*

$$\boldsymbol{f} \in W^{k,p}(\Omega), \boldsymbol{g} \in W^{k+2-1/p,p}(\Gamma) \tag{1.17}$$

Alors $\boldsymbol{u} \in W^{k+2,p}(\Omega)$ et il existe un constant Ctelle que

$$\| \boldsymbol{u} \|_{k+2,p,\Omega} \leq C\{\| \boldsymbol{f} \|_{k,p,\Omega} + \| \boldsymbol{g} \|_{k+2-1/p,p,\Gamma}\} \tag{1.18}$$

1.2.2 Problème de Poisson avec condition aux limites de Neumann non homogène :

Nous avons le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{cc} -\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{g}, & \text{sur } \mathit{\Gamma} \\ \text{telle que } f \in L^2(\Omega) \text{ et } g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathit{\Gamma}) \text{ verifies :} & \\ \int_\Omega f \; \mathrm{d}x + < g, 1 >_{\mathit{\Gamma}} = 0 & \end{array}\right. \tag{1.19}$$

Où

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \mathbf{u}.n$$

Il n'y aucune chance pour que la solution soit unique, pour éviter ce problème nous avons définit l'espace $H^1(\Omega)/R$ muni de la norme

$$\|\dot{\mathbf{v}}\|_{H^1(\Omega)/R} = \inf_{\mathbf{v} \in \dot{\mathbf{v}}} \|\mathbf{v}\| \tag{1.20}$$

cet espace est un espace de Hilbert et la norme $\|\dot{\mathbf{v}}\|_{H^1(\Omega)/R}$ est équivalente a $|\mathbf{v}|_{1,\Omega}$.

On introduisons le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trauver } \dot{v} \in H^1/R \\ \mathbf{a}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{L}\ (\dot{\mathbf{v}}) \end{array}\right. \tag{1.21}$$

Telle que $\mathbf{a}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \forall u \in \dot{\mathbf{u}}\ \forall v \in \dot{\mathbf{v}}$ et $L : v \to (f, v) + < g, v > \forall v \in \dot{\mathbf{v}}$, d'après la théorème de Lax-Milgram le problème (1.21) admet un et une seule solution dans $H^1(\Omega)/R$, le problème (1.21) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trauver } \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{L}(\mathbf{v}) \end{array}\right. \tag{1.22}$$

si $\dot{\mathbf{u}}$ est une solution de problème (1.21) et $\dot{\mathbf{u}} \in H^2(\Omega)/R$ implique que $\mathbf{u}$ est une solution de problème (1.22) telle que

$$| \mathbf{u} |_{1,\Omega} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{H^{\frac{-1}{2}}(\mathit{\Gamma})}) \tag{1.23}$$

Proposition 3 *([1]) le problème (1.21) admet une solution unique* $\dot{\boldsymbol{u}}$ *dans* $H^1(\Omega)/R$ *et* $\dot{\boldsymbol{u}}$ *dépend continument à les donnés de problème (1.20) telle que*

$$|\boldsymbol{u}|_{1.\Omega} \leq C(\ \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{g}\|_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)}), \forall \boldsymbol{u} \in \dot{\boldsymbol{u}} \tag{1.24}$$

de plus si $\dot{\boldsymbol{u}} \in H^2(\Omega)/R$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *est la solution unique de (1.19).*

Pour la régularité de la solution nous avons donner la théorème suivant

Théorème 4 *([1]) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*, avec un bord* Γ *de classe* C^{k+1} *ou* $\boldsymbol{k} > 0$ *Supposons que* $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ *sont les données de problème (1.19) telle que*

$$\boldsymbol{f} \in W^{k,p}(\Omega), \boldsymbol{g} \in W^{k+1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) 1 < p < \infty. \tag{1.25}$$

Alors $\dot{\boldsymbol{u}} \in W^{k+2,p}(\Omega)/R$ *et il existe un constant* $C = C(k, p, \Omega)$ *telle que*

$$\|\dot{\boldsymbol{u}}\|_{W^{k+2,p}(\Omega)/R} \leq C\{\|\boldsymbol{f}\|_{k,p,\Omega}+\|\boldsymbol{g}\|_{k+1-\frac{1}{p},p,\Gamma}\}. \tag{1.26}$$

Preuve. voir Girault-Raviart page 15 ■

Maintenant on va définir quelques espaces importants $H(div, \Omega)$ et $H(rot, \Omega)$. Sont deux sous espaces de champs de vecteurs $L^2(\Omega)^N$, On définit l'espace

$$H(div, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \mathbf{div}\ \mathbf{v}\ \in L^2(\Omega)\}. \tag{1.27}$$

Telle que $\mathbf{div}\ v = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_i}$ muni de la norme suivante

$$\|\mathbf{v}\|_{div,\Omega} = (\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|div\ \mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \tag{1.28}$$

Cet espace est un espace de Hilbert et on peut remarquer que l'injections suivants $H^1(\Omega)^d \hookrightarrow H(div, \Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$ sont continue, on pose que $H_0(div, \Omega) = \overline{D(\Omega)^N}$.

Théorème 5 ***(La densité dans** $H(div, \Omega)$**)** ([1])*
Soit Ω *un ouvert borné Lipschitzien continue de* $\mathbb{R}^N$*. L'espace* $D(\bar{\Omega})^N$ *est dense dans* $H(div, \Omega)$*.*

Preuve. voir Girault-Rivairt page 18 Théorème 2.2 ■

Rappelons que l'espace $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ est le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{\ \textbf{l'image de l'application de trace sur}\ H^1(\Omega)\} \tag{1.29}$$

Théorème 6 *(**Trace normale**)([1])*
L'application γ_n : $\boldsymbol{v} \longrightarrow \boldsymbol{v}.n_{/\Gamma}$ définie sur $D(\bar{\Omega})^N$, On peut prolonger γ_n vers une application linéaire et continue sur $H(div, \Omega)$ vers $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$

Preuve. voir Girault-Rivairt page 18 ■

L'extension $\gamma_n \mathbf{v}$ est appelé la trace normale de $\mathbf{v}$ sur Γ et notée $\mathbf{v}.n$ et nous avons la formule de Green suivante :

$$\forall v \in H(div, \Omega), (\mathbf{v}, \mathbf{grad}\ \varphi) + (\mathbf{div}\ \mathbf{v}\ , \varphi) = \langle \mathbf{v}.n, \varphi \rangle_\Gamma, \forall \varphi \in H^1(\Omega) \qquad (1.30)$$

Théorème 7 *([1])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $H_0(div, \Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)^d$ dans $H(div, \Omega)$ alors

$$H_0(div, \Omega) = \boldsymbol{Ker}(\gamma_n)$$

On définit l'espace

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N, \mathbf{rot}\ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N\} \qquad (1.31)$$

Telle que si $N = 2$ alors pour tout fonction $\psi \in D(\Omega)$ et $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ dans $D(\Omega)^2$ on a

$$\mathbf{Rot}\ \psi = (\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1})$$

$$\mathbf{rot}\ v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

et si $N = 3$ on a

$$\mathbf{rot}\ v = (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})$$

Cet espace est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|v\|_{\mathbf{rot}} = (\|v\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\mathbf{rot}\ \mathrm{v}\|^2_{L^2(\Omega)^N})^{\frac{1}{2}} \qquad (1.32)$$

et $H_0(rot, \Omega) = \overline{D(\Omega)^N}^{H(rot,\Omega)}$ [1]

Théorème 8 *([1]) Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien continue de $\mathbb{R}^d$,l'espace $D(\bar{\Omega})^d$ dense dans $H(rot, \Omega)$*

Preuve. voir Girault-Reviart page 35 ■

Théorème 9 ***(Trace tengentiel)*** *([1])*

L'application $\gamma_\tau : \boldsymbol{v} \longrightarrow \boldsymbol{v}.\tau_{/\Gamma}$ *si* $N = 2$ *ou* $\gamma_\tau : \boldsymbol{v} \longrightarrow \boldsymbol{v} \times n_{/\Gamma}$ *si* $N = 3$ *définie sur* $D(\bar{\Omega})^d$ *; on peut prolonger* γ_τ *vers une application linéaire et continue sur* $H(rot, \Omega)$ *vers* $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ *si* $N = 2$ *ou vers* $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)^3$ *si* $N = 3$*, de plus on a la formule de Green*

$$(\boldsymbol{rot}\ v, \varphi) + (v, \boldsymbol{rot}\ \varphi) = \langle \gamma_\tau \boldsymbol{v}, \varphi \rangle, \forall v \in H(rot, \Omega), \varphi \in H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)^3 \ si\ N = 3$$

et $\varphi \in H^1(\Omega)$ *si* $N = 2$

Preuve. voir Girault-Reviart page 35 ■

On va terminer cette partie par le théorème suivant

Théorème 10 *([1]) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\Re^d$ *et soit* $H_0(rot, \Omega)$ *la fermeture de* $D(\Omega)^d$ *dans* $H(rot, \Omega)$ *alors*

$$H_0(rot, \Omega) = \boldsymbol{Ker}_(\gamma_\tau)$$

[1]

1.3 Alternative de Fredholm et théorie spectral

Soient **E** et **F** deux espaces de Banach

Définition 2 *([4]) On dite que* ***T*** $\in$ ***L(E,F)*** *est compact si* $\boldsymbol{T}(B_E)$ *est relativement compact pour la topologie forte, on désigne par* ***K(E,F)*** *l'ensemble des opérateurs compact et on pose* ***K(E)=K(E,E)*** *.*

On va donner maintenant un théorème important pour notre travail, note que T^* est l'adjoint de l'opérateur T

Théorème 11 (Shouder) *([4]) Si* $T \in$ ***K(E,F)*** *alors* $T^* \in$ ***K(E,F)*** *et réciproquement*

Preuve. voir Brizes analyse fonctionnelle page 90 ■

L'alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation de **u-Tu=f** et elle est donner par

Théorème 12 *([4]) Soit* $T \in K(E)$ *alors on a*

- *a)* $N(I - T)$ *est de dimension finie*
- *b)* $R(I - T)$ *est fermé et plus précisément* $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$

- *c)* $N(I-T)=\{0\} \Longleftrightarrow R(I-T)=E$,
- *d)* $\dim N(I-T)= \dim N(I-T^{*})$.

Preuve. Voir Brizes (analyse fonctionnelle) page 95. ■

Remarque 3 *([4]) On remarquons que pour tout* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E}$ *l'équation* ***u-Tu=f*** *admet une solution unique , ou bien l'équation homogène* $\boldsymbol{u}-T\boldsymbol{u}=0$ *admet* $\boldsymbol{n}$ *solutions linéairement indépendant et dans ce cas l'équation non homogène* $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{Tu}=f$ *est résoluble si et seulement si* $\boldsymbol{f}$ *vérifiée* $\boldsymbol{n}$ *condition d'orthogonalité de plus on peut remarquer que la condition (c) en dimension finie remplacer par* $\boldsymbol{T}$ *injective si et seulement si* $\boldsymbol{T}$ *est surjective*

1.3.1 Spectre d'opérateur compact

Définition 3 *([4]) Soit* $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{L(E)}$
l'ensemble résolvant est $\rho(T)=\{\lambda \in \mathbb{R},(T-\lambda I)$ *bijectif de* E *sur* $E\}$*, le spectre* $\sigma(T)$ *est le complémentaire de l'ensemble résolvant* $\sigma(T)=\mathbb{R}/\rho(T)$*, on dite que* λ *est un valeur propre si* $N(T-\lambda I)\neq 0$*,*$N(T-\lambda I)$ *est l'espace propre associé a* λ*.*

Proposition 4 *([4]) Le spectre* $\sigma(T)$ *est un ensemble compact et* $\sigma(T) \subset [-\|T\|,+\|T\|]$

Théorème 13 *([4]) Soit* $T \in K(E)$ *avec dim* $(E)=\infty$ *alors on a :*
- *a)* $0 \in \sigma(T)$
- *b)* $\sigma(T)/\{0\}=VP(T)/\{0\}$
- *c) l'une des situations suivantes :*
  - *ou bien* $\sigma(T)=\{0\}$
  - *ou bien* $\sigma(T)/\{0\}$ *est fini*
  - *ou bien* $\sigma(T)/\{0\}$ *est suite qui tend vers 0*

Chapitre 2

Problème de Vecteur Potentiel Dans 3D

Le bute de ce chapitre, c'est la résolution de problème $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\ \varphi$ avec $\mathbf{div}\ \varphi = 0$ telle que $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^N$ et φ vérifié quelques condition aux limites, si $\mathbf{N} = 3$ dit que φ est un vecteur potentiel. On peut remarquer que si la solution existe alors elle est dans $H(div, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$ ou dans un sous espace de $H(div, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$. La première étapes qui nous avons faire c'est l'étude de l'intersection de $H(div, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$

Définition 4 *([3]) Soit $\boldsymbol{X}(\Omega) = H(div, \Omega) \cap H(rot, \Omega)$. $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{X}_0(\Omega)$ les sous espaces de $\boldsymbol{X}(\Omega)$ définit par*

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}(\Omega), \boldsymbol{v.n} = 0\} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}(\Omega), \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0\} \tag{2.2}$$

$$X_0(\Omega) = \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{U} \tag{2.3}$$

Muni de la norme suivante $\|\boldsymbol{u}\| = (\|\boldsymbol{u}\|^2_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{div}\ u\|^2_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{u}\|^2_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}}$

Nous avons voir déjà dans le chapitre précédent que l'espace $D(\bar{\Omega})^N$ est dense dans $H(div, \Omega)$ et $H(rot, \Omega)$ donc on a la proposition suivante.

Proposition 5 *([3]) L'espace $D(\bar{\Omega})^3$ est dense dans $X(\Omega)$.*

Lemme 2 *([3]) L'espace $X_0(\Omega)$ est coïncide avec $H^1_0(\Omega)^3$*

Preuve. voir Armouche-Bernardi page 5 ■

Proposition 6 *([3]) L'injection de $X(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^3$ n'est pas compact*

Preuve. Soit $(g_k)_k$ une suite qui converge vers 0 faiblement mais n'est pas forcément dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on considère le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta\chi_k = 0 & \text{dans } \Omega \\ \chi_k = g_k & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases}$$

Donc la suite $(\chi_k)_k$ est bornée de plus tend vers 0 faiblement mais n'est pas forcément dans $H^1(\Omega)$. Pour tout k on suppose que $v_k = \text{grad } \chi_k$ satisfait

$$\text{rot } v_k = 0 \text{ et div } v_k = 0 \text{ dans } \Omega$$

Comme χ_k est bornée dans $H^1(\Omega)$ alors on peut extraite une sous suite qui converge forcément dans $L^2(\Omega)$ grâce a l'injection $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact, de plus si La suite v_k est converge vers 0 dans $L^2(\Omega)^3$ forcément. donc χ_k converge vers 0 dans $H^1(\Omega)$ forcément ce qui un contradiction . ■

Théorème 14 *([3]) L'injections de* $\boldsymbol{V}$ *et* $\boldsymbol{U}$ *dans* $L^2(\Omega)^3$ *sont compacts*

Preuve. voir Armouche Bernardi page 6 . ■

Lemme 3 *([3]) Soit* Ω *un ouvert borné de classe* C^1*, alors* $H^1(\Omega)^3 \cap V$ *est dense dans* V

Preuve.
Soit $v \in V$, alors on peut trouver une suite v_k de $D(\bar{\Omega})^3$qui converge vers v dans $X(\Omega)$, pour tout k, on considère la suite χ_k des solutions de problème suivant

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \int_\Omega \mathbf{grad}\ \chi_k \cdot\ \mathbf{grad}\ \varphi = \int_\Omega \mathbf{v}_k \cdot\ \mathbf{grad}\ \varphi \tag{2.4}$$

D'une façon équivalente χ_k sont des solutions de problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -\Delta\chi_k = \mathbf{div}\ v_k & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \chi_k}{\partial n} = v_k \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases}$$

Comme Ω est de classe C^1, alors pour tout $\mathbf{k}$ les fonctions χ_k sont dans $H^2(\Omega)$ donc la fonction $v_k - \mathbf{grad}\ \chi_k$ est dans $H^1(\Omega)^3$. La suite v_k est converge dans $X(\Omega)$, on peut vérifier que la suite χ_k est converge dans $H^1(\Omega)$ vers la solution χ de problème

$$\begin{cases} -\Delta\chi = \mathbf{div}\ v & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases}$$

Finalement La solution χ est dans $H^2(\Omega)$, donc la suite $(v_k - \text{grad } \chi_k + \text{ grad } \chi)_k$ de $H^1(\Omega)^3 \cap V$ est converge vers $\mathbf{v}$ dans V ■

Théorème 15 *([3]) Soit Ω est de classe C^1, Alors l'espace $\boldsymbol{V}$ est injecte continument dans $H^1(\Omega)^3$.*

Preuve. voir Armouche-Bernardi page 6 . ■

Maintenant nous avons faire les même étapes pour l'espace U .

Lemme 4 *Soit Ω un ouvert borne de classe C^1, alors $H^1(\Omega)^3 \cap \boldsymbol{U}$ est dense dans $\boldsymbol{U}$*

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, alors on peut trouver une suite v_k de $D(\bar{\Omega})^3$ qui converge vers $\mathbf{v}$ dans $X(\Omega)$. On introduisons l'espace suivent

$$V_0 = \{\mathbf{v} \ \in \mathbf{V}, \mathbf{div} \ \ \mathbf{v} = 0\}$$

D'après la théorème 15 , on a l'espace V_0 dans $H^1(\Omega)^3$. Pour tout $\mathbf{k}$, on a le problème suivant : trouver $\zeta_k \in V_0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathbf{V}_0, \int_\Omega \zeta_k \cdot \varphi dx + \int_\Omega \mathbf{rot}\zeta_k \cdot \mathbf{rot}\varphi dx = \int_\Omega v_k \cdot \mathbf{rot}\phi dx$$

Ce problème admet une solution unique dans $H^1(\Omega)^3$; maintenant nous avons chercher à une autre problème équivalent, on va construire une nouvelle fonction de test, soit $\tilde{\varphi}$ un élément de V et χ est la solution dans $H^2(\Omega)$ de problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta\chi = \mathbf{div}\ \tilde{\varphi}, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} = \tilde{\varphi} \cdot n = 0, & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases}$$

On remarque que la fonction $\varphi = \tilde{\varphi} - \mathbf{grad}\ \chi$ est dans $\mathbf{V}_0$ et on a

$$\int_\Omega \zeta_k \cdot \mathbf{grad}\ \chi dx = -\int_\Omega \mathbf{div}\ \zeta_k \cdot \chi + \int_\Gamma (\zeta_k \cdot n)\chi ds = 0$$

Donc, on peut remplacer φ par $\tilde{\varphi} - \mathbf{grad}\ \chi$ et ζ_k aussi une solution dans $\mathbf{V}$ de problème

$$\forall \tilde{\varphi} \in \mathbf{V}, \int_\Omega \zeta_k \cdot \tilde{\varphi} dx + \int_\Omega \mathbf{rot}\ \zeta_k \cdot \mathbf{rot}\ \tilde{\varphi} = \int_\Omega v_k \cdot \mathbf{rot}\ \tilde{\varphi} dx$$

Autrement dite que

$$\begin{cases} \zeta_k - \Delta\zeta_k = \mathbf{rot} v_k & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \zeta_k = 0 & \text{dans}\Omega \\ \frac{\partial \zeta_k}{\partial n} = 0 \text{ et } \zeta_k \times n = v_k \times n & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases}$$

ce problème aux limites est un problème elliptique admet une solution ζ_k dans $H^2(\Omega)^3$. Similaire la solution ζ de problème

$$\begin{cases} \zeta - \Delta\zeta = v & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{div}\ \zeta = 0 & \text{dans}\Omega \\ \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \text{ et } \zeta \times n = v \times n & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases}$$

est dans $H^2(\Omega)^3$. Finalement la suite $(v_k - \mathbf{grad}\zeta_k + \text{grad } \zeta)_k$ dans l'espace $H^1(\Omega)^3 \cap$ **U** est converge vers **v** dans U. ■

Théorème 16 *([3]) Soit* Ω *est de classe* C^1*. Alors l'espace* ***U*** *est injecte continument dans* $H^1(\Omega)^3$ *.*

corolaire
Si Ω est de classe C^m alors pour tout $m \geq 1$ les espaces suivants

$$\{v \in L^2(\Omega)^3,\ \mathbf{div}\ \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega)^3\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega)^3, \mathbf{v}\ \cdot n = 0\} \tag{2.5}$$

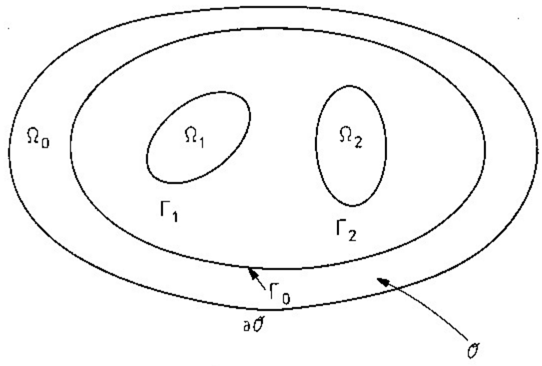
$$\{v \in L^2(\Omega)^3,\ \mathbf{div}\ \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega)^3\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega)^3, \mathbf{v} \times n = 0\} \tag{2.6}$$

sont injecte continument dans $H^m(\Omega)^3$.

2.1 Vecteur Potentiel Sans conditions aux Limites

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^3$, nous avons poser les hypothèses suivants : Ω borné, multiplement connexe et Γ son bord est de classe C^2. Soit Γ_0 est le bord extérieur de Ω et $\Gamma_1, ..., \Gamma_p$ sont les composants connexe de Γ.

On suppose qu 'il est existe m surfaces $\Sigma_1, ..., \Sigma_m$, telle que $\Omega_0 = \Omega / \bigcup \Sigma_i$ est un simplement connexe et régulière, les Σ_i sont disjoints deux a deux, si $m = 0$ on dit que Ω est simplement connexe.
Noté que $<,>_{\Gamma_i}$ est le crochet de dualité de $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_i)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$



Lemme 5 *([3]) Pour tout $u \in H(div, \Omega)$ vérifiée :*

$$\begin{array}{c} div\ u = 0\ sur\ \Omega \\ < u \cdot n, 1 >_{\Gamma_i} = 0,\ \ 0 \leq i \leq p \end{array} \tag{2.7}$$

il est existe un vecteur ψ_0 dans $H^1(\Omega)^3$ telle que

$$u = \ rot\ \psi_0\ et\ \ div\ \psi_0 = 0\ sur\ \Omega \tag{2.8}$$

Preuve.
soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ une fonction qui vérifiée (2.7), soit O un ouvert borné régulier avec un bord connexe telle que $\bar{\Omega}$ est dans O, on noté que Ω_i sont les composants connexe de $O/\bar{\Omega}$ avec des bords Γ_i, on va considérer χ_i les solutions dans $H^1(\Omega_i)$ de problème de Neumann suivent :

$$\begin{cases} -\Delta\chi_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial\chi_0}{\partial n} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial\chi_0}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial O \end{cases} \tag{2.9}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta\chi_i = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ \frac{\partial\chi_i}{\partial n} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i\ 1 \leq i \leq p \end{cases} \tag{2.10}$$

et l'extension $\bar{u}$ de la fonction u définit par

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{grad}\chi_i & \text{sur } \Omega_i\ ,\ 0\ \leq i \leq p \\ 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3/\bar{O} \end{cases} \tag{2.11}$$

est dans $H(div, \mathbb{R}^3)$ avec une divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$. On noté $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ la transformation de Fourier qui vérifie l'équation

$$\zeta_1\hat{u}_1 + \zeta_2\hat{u}_2 + \zeta_3\hat{u}_3 = 0$$

On observe que la fonction $\psi_0 = (\psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{03})$ vérifiée la condition (2.8) si et seulement si

$$\hat{u}_1 = \zeta_2\hat{\psi}_{03} - \zeta_3\hat{\psi}_{02}, \hat{u}_2 = \zeta_3\hat{\psi}_{01} - \zeta_1\hat{\psi}_{03}, \hat{u}_3 = \zeta_1\hat{\psi}_{02} - \zeta_2\hat{\psi}_{01} \tag{2.12}$$

et

$$\zeta_1\hat{\psi}_{01} + \zeta_2\hat{\psi}_{02} + \zeta_3\hat{\psi}_{03} = 0 \tag{2.13}$$

dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ le système (2.12) et (2.13) équivalent a

$$\hat{\psi_{01}} = \frac{\zeta_3\hat{u}_2 - \zeta_2\hat{u}_3}{|\zeta|^2}, \hat{\psi_{02}} = \frac{\zeta_1\hat{u}_3 - \zeta_3\hat{u}_1}{|\zeta|^2}, \hat{\psi_{03}} = \frac{\zeta_2\hat{u}_1 - \zeta_1\hat{u}_2}{|\zeta|^2} \tag{2.14}$$

telle que $|\zeta|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$. On va défini ψ_0 par l'équation (2.14), il suffit montrer que $\hat{\psi_0}$ est dans $H^1_{Loc}(\mathbb{R}^3)$. Son gradient est dans $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ grâce a l'inégalité $|\zeta_j\hat{\psi_{0k}}| \leq \sum_{i=1}^{3} |\hat{u}_i|$ de plus, On fixer la fonction ω de classe C^∞ avec support compact dans $\mathbb{R}^3$ et égale 1 dans un voisinage de 0, et on a

$$\hat{\psi}_0(\zeta) = \omega(\zeta)\hat{\psi}_0(\zeta) + (1 - \omega(\zeta))\hat{\psi}_0(\zeta)$$

On observe que $\omega\hat{\psi}_0$ admet un support compact alors son inverse par la transformation de Fourier est analytique et son instruction dans Ω est dans $L^2(\Omega)^{3\times3}$, et $1-\omega$ est nulle de un voisinage de 0 donc $(1-\omega)\hat{\psi}_0$ est dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ finalement l'inverse de $\hat{\psi}_0$ par la transformation de Fourier est dans $H^1(\Omega)^3$. Inversement pour tout ψ_0 dans $H^1(\Omega)^3$ on a **div** (**rot** $\psi_0 = 0$) de plus, pour tout μ_i, soit μ_i est une fonction de classe C^∞ dans $\bar{\Omega}$ égal 1 dans le voisinage de Γ_i et nulle sur Γ_k, $0 \leq i \leq p$, k $\neq i$, on a

$$< u \cdot n, 1 >_{\Gamma_i} = < \mathbf{rot}\ (\mu_i\psi_0) \cdot n, 1 >_{\Gamma} + \int_\Omega \mathbf{div}\ (\mathbf{rot}\ (\mu_i\psi_0))dx = 0 \tag{2.15}$$

Donc ψ_0 vérifiée la condition (2.8) . ∎

2.2 Vecteur potentiel tangentiel

Dans cette partie nous avons démontrer l'existence d'un vecteur potentiel dans V, on introduisons l'espace suivent

$$\Theta = \{v \in H^1(\Omega_0), [v]_i = constant\ 1 \leq i \leq m\}$$

Telle que la notation $[v]_i$ signifiée la restriction de la trace de v sur chaque Σ_i. La première lemme qui nous avons utiliser ici c'est une extension de la formule de Green pour les éléments de $H^1(\Omega_0)$

Lemme 6 *([3]) Pour tout ψ dans $H_0(div, \Omega)$, la restriction de $\psi \cdot n$ sur Σ_i est dans $H^{\frac{-1}{2}}(\Sigma_i)$ de plus nous avons la formule de Green suivante*

$$\forall \chi \in H^1(\Omega_0)\ ,\ \sum_{i=1}^{m} < \psi \cdot n, [\chi]_i >_{\Sigma_i} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{div}\ \psi\ \chi dx + \int_{\Omega_0} \psi \cdot \boldsymbol{grad}\ \chi dx \quad (2.16)$$

Preuve. Pour tout $\mu \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_i)$ on peut trouver une fonction φ dans $H^1(\Omega_0)$ telle que $[\varphi]_i = 0$ si $k \neq i$ sinon égal μ et φ satisfait l'estimation suivante

$$||\varphi||_{1,\Omega_0} \leq C\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Sigma_i} \quad (2.17)$$

maintenant, soit $\psi \in D(\Omega)^3$ alors on a la formule de Green suivant

$$< \psi \cdot n, \mu >_{\Sigma_i} = \int_{\Omega_0} \psi \cdot\ \mathbf{grad}\ \varphi\ \mathrm{dx} + \int_{\Omega_0} \mathbf{div}\ \psi\ \varphi\ \mathrm{dx}$$

De plus on a

$$|< \psi \cdot n, \mu >_{\Sigma_i}| \leq C\|\psi\|_{div,\Omega}\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Sigma_i}$$

telle que la constante C est la constante qui vérifie l'estimation (2.17), donc la restriction $\psi \cdot n$ sur Σ_i dans $H^{\frac{-1}{2}}(\Sigma_i)$ et vérifiée

$$\|\psi \cdot n\|_{\frac{-1}{2},\Sigma_i} \leq C\|\psi\|_{div,\Omega}$$

La densité de $D(\Omega)^3$ dans $H_0(div, \Omega)$ permet de prolonger la trace normale sur Σ_i pour les éléments de $H_0(div, \Omega)$ et l'extension vérifiée les mêmes propriétés et on peut utiliser la partition de l'unité pour démontrer que la formule de Green sera sous la forme (2.16). ■

Maintenant on va donner une caractérisation de l'espace Θ.

Lemme 7 *([3]) Soit $\boldsymbol{v}$ un élément de $H^1(\Omega_0)$, alors $\boldsymbol{v}$ est dans Θ si et seulement si $\boldsymbol{rot}(\ \tilde{\boldsymbol{grad}}\ \boldsymbol{v}) = 0$ sur Ω telle que $\tilde{\boldsymbol{grad}}\ \boldsymbol{v}$ signifie le prolongement de $\boldsymbol{grad}\ \boldsymbol{v}$ jusqu'à Ω*

Preuve.
Premièrement, on observe que pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\Omega_0)$ et pour tout $\varphi \in D(\Omega)^3$ on a

$$< \mathbf{rot}\ (\tilde{\mathbf{grad}}\ v), \varphi > = \int_{\Omega_0} \mathbf{grad}\ v \cdot\ \mathbf{rot}\ \varphi\ dx \quad (2.18)$$

Alors d'après le lemme précédente on a

$$\forall v \in H^1(\Omega_0), \forall \varphi \in D(\Omega)^3 < rot(\ \tilde{\mathbf{grad}}\ v), \varphi > = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Sigma_i} [v]_i \text{ rot } \varphi \cdot n\ d\tau \quad (2.19)$$

d'après la formule de stocks on peut démontrer que

$$\forall \varphi \in D(\Omega)^3, \forall \mu \in L^2(\Sigma_i), \int_{\Sigma_i} \mu \text{ rot } \varphi \cdot n \; d\tau =< \mathbf{grad} \; \mu \times n, \varphi >_{\Sigma_i} \tag{2.20}$$

Soit $v \in \Theta$ par (2.20) et (2.19) avec $\mu = [v]_i$ ce qui implique que $\mathbf{rot}(\tilde{\mathbf{grad}} \; v) = 0$ maintenant, soit $v \in H^1(\Omega_0)$ telle que vérifie rot $(\tilde{grad}$ v$) = 0$ d'après (2.19)et (2.20) donc on a

$$\forall \varphi \in D(\Omega)^3 \sum_{i=1}^{p} < (grad \times n)[v]_i, \varphi >_{\Sigma_i} = 0 \tag{2.21}$$

On peut prend une fonction aφ avec certain support compact qui implique que $(grad \times n)[v]_i = 0$ donc $[v]_i$ est constant pour tout $1 \leq i \leq p$ ■

Théorème 17 *([3]) Pour tout v dans $H(div, \Omega)$ satisfait :*

$$div \; v = 0 \; sur \; \Omega \tag{2.22}$$

$$< u \cdot n, 1 >_{\Gamma_i} = 0, 0 \leq i \leq p \tag{2.23}$$

si et seulement si il existe un vecteur potentiel ψ dans $X(\Omega)$ telle que

$$\begin{gathered} u = \; rot \; \psi \; et \; \; div \; \psi = 0 \; sur \; \Omega \\ \psi \cdot n = 0 \; sur \; \Gamma \\ < \psi \cdot n, 1 >_{\Sigma_i} = 0 \; 1 \leq i \leq m \end{gathered} \tag{2.24}$$

Telle que la fonction ψ est unique

Remarque 4 *Dans Le théorème précédent la fonction ψ est indépendant a le chois des surfaces Σ_i, si ψ un vecteur quelconque de $H(div, \Omega)$ telle que*

$$div \; \psi = 0 \; sur \; \Omega \; et \; \psi \cdot n = 0 \; sur \; \Gamma \tag{2.25}$$

Supposons que il existe un ouvert Lipschitzienne ω dans Ω on a

$$< \psi \cdot n, 1 >_{\partial\omega} = \int_{\omega} div\psi = 0 \tag{2.26}$$

Si Σ_1 et Σ_2 est dans ω telle que vérifies les conditions suivants

$$\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2 \subset \partial\omega, \partial\omega / \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2 \subset \Gamma \; et \; \Sigma_1 \bigcap \Sigma_2 = \phi \tag{2.27}$$

Alors

$$< \psi \cdot n, 1 >_{\Sigma_1} = - < \psi \cdot n, 1 >_{\Sigma_2} \tag{2.28}$$

Donc si le flux de ψ à traverse Σ_1 est nulle alors le flux de ψ a traverse Σ_2 est nulle .

L'unicité de vecteur potentiel est dépendant à la caractérisation de l'espace suivant

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \ \mathbf{V}, \mathbf{div}\ \mathbf{v} = 0 \text{ et } \mathbf{rot}\ \mathbf{v} = 0\} \tag{2.29}$$

Proposition 7 *([3]) La dimension de H est égal à m, et admet une base $\tilde{\text{grad}}\ q_i$, $1 \leq i \leq m$, telle que q_i est la solution unique dans $H^1(\Omega_0)$ de problème suivant*

$$\begin{cases} -\Delta\partial q_i = 0 & \textit{dans } \Omega_0. \\ \frac{\partial q_i}{\partial n} = 0, & \textit{sur } \Gamma. \\ [q_i]_k = \textit{ constant } \textit{ et } [\frac{\partial q_i}{\partial n}]_k = 0, 1 \leq k \leq m \\ < \frac{\partial q_i}{\partial n}, 1 >_{\Sigma_k} = \delta_{i,k}, 1 \leq k \leq m \end{cases} \tag{2.30}$$

Preuve. ([3]) L'espace Θ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega_0)$, d'après la théorème de Lax-Milgram le problème : trouver q_i dans Θ telle que

$$\forall v \in \Theta, \int_{\Omega_0} \text{ grad } q_i \cdot \text{ grad } v = [v]_i \tag{2.31}$$

. Admet une solution dans Θ, dans (2.31), on substitutions $v \in D(\Omega)$ on obtient

$$< \text{div } \tilde{\mathbf{grad}}\ q_i, v >= - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{grad}}\ q_i \cdot \mathbf{grad}\ v dx = - \int_{\Omega_0} \mathbf{grad}\ q_i \cdot \mathbf{grad}\ v dx = 0 \tag{2.32}$$

Donc $\tilde{\text{grad}}\ q_i$ est dans $H(div, \Omega)$, de plus $-\Delta q_i$ est égal 0 sur Ω_0 et d'après la formule de Green on a $[\frac{\partial q_i}{\partial n}]_k$ est égal 0 sur Σ_k, de plus on va utiliser (2.31) mais pour $v \in H^1(\Omega)$ on obtient

$$\int_{\Omega_0} \text{ grad } q_i \cdot \text{ grad } v =< \frac{\partial q_i}{\partial n}, v >_{\Gamma} = 0 \tag{2.33}$$

Conséquence, $\tilde{\mathbf{grad}}\ q_i \cdot n$ est nulle sur Γ et $\tilde{\text{grad}}\ q_i$ est dans $H_0(div, \Omega)$. d'après le lemme (6)la restriction de $\frac{\partial q_i}{\partial n}$ sur Σ_k est dans $H^{\frac{-1}{2}}(\Sigma_k)$. On va fixer un entier k, et on prend $v \in \Theta$ telle que $[v]_k = \delta_{i,k}$ pour tout i et on appliquons (2.16) et (2.31) avec $\chi = v$ on trouve (2.30) .
On va démontrer maintenant que l'ensemble grad q_i est engendrer l'espace H, soit $w \in H$ on suppose que $u = w - \sum_{i=1}^{p} < w \cdot n, 1 >_{\Sigma i} \tilde{\text{grad}}\ q_i$. Il est claire que u est dans H et satisfait la condition $< u \cdot n, 1 >_{\Sigma_k} = 0$ pour tout $1 \leq k \leq m$ comme Ω_0 est simplement connexe et rot $u = 0$ sur Ω_0 alors il existe une fonction q dans $H^1(\Omega_0)$ telle que u est coïncide a $\tilde{\text{grad}}\ q$ et $\mathbf{div}\ u = 0$ alors $\Delta q = 0$ sur Ω_0 de plus u est dans $H_0(div, \Omega)$ donc $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$ sur Γ ; et pour tout i ,$[\frac{\partial q_i}{\partial n}]$ est égal a 0 sur Σ_i mais $\mathbf{rot}\ u$ est égal 0 sur Ω le lemme (2) implique que q est dans Θ alors $< \frac{\partial q}{\partial n}, 1 >_{\Sigma_i} = 0$ pour tout i donc q est constant de plus $\mathbf{u}$ est égal 0 . ■

Preuve. (théorème 17)([3])
supposons que $\mathbf{u}$ est dans $H(div, \Omega)$ telle que vérifie les conditions (2.22) et (2.23) alors d'après le lemme (5) il existe un vecteur ψ_0 potentiel de $\mathbf{u}$, on introduisons la fonction χ la solution de problème

$$\begin{cases} -\Delta\chi = 0, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial\chi}{\partial n} = \psi_0 \cdot n, & \text{sur } \mathit{\Gamma} \end{cases} \tag{2.34}$$

Finalement on pose que $\psi = \psi_0 - \text{ grad } \chi - \sum_{i=1}^{p} < \psi_0 - \textbf{ grad } \chi \cdot \mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_i} \ \tilde{\textbf{grad}}\ q_i$ et on peut vérifie facilement que ψ vérifie les condition (2.24) ∎.

corolaire : Dans l'espace $\mathbf{V}$ la semi norme

$$w \to \| \textbf{ rot } \mathbf{w} \|_{L^2(\Omega)^3} + \| \textbf{ div } \mathbf{w} \ \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} |< \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 >_{\Sigma i}| \tag{2.35}$$

est une norme équivalente à la norme de $\mathbf{V}$
Preuve. voir Amrouche-Brnardi page 21 ∎ .

2.3 vecteur potentiel normale

Dans cette partie nous avons étudie le cas que le vecteur potentiel est dans $\mathbf{U}$.

Théorème 18 *([3]) Pour tout vecteur* $\boldsymbol{v}$ *dans* $H(div, \Omega)$ *vérifie les conditions suivants*

$$\textbf{\textit{div}} \ \boldsymbol{v} \ = 0 \ sur \ \Omega \ et \ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ sur \ \mathit{\Gamma} \tag{2.36}$$

$$< \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, 1 >_{\Sigma i} = 0, 1 \leq i \leq m \tag{2.37}$$

Si et seulement si il existe un vecteur potentiel ψ *dans* $X(\Omega)$ *telle que*

$$\boldsymbol{v} \ = \ \textbf{\textit{rot}} \ \psi \ sur \ \Omega \ et \ \ \textbf{\textit{div}} \ \psi = 0 \ sur \ \Omega \tag{2.38}$$

$$\psi \times n = 0 \ sur \ \mathit{\Gamma} \tag{2.39}$$

$$< \psi \cdot n, 1 >_{\mathit{\Gamma}_i} = 0, 0 \leq i \leq p \tag{2.40}$$

La fonction ψ *est unique*

L'unicité de la fonction ψ est dépendant à l'espace suivant

$$\mathbf{G} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{U}, \ \textbf{rot } \mathbf{v} \ = 0 \text{ et } \ \textbf{div } \mathbf{v} \ = 0 \text{ sur } \Omega\}$$

Proposition 8 *([3]) La dimension de G est égal à p, et admet une base des fonctions* ***grad*** *f_i, telle que les fonctions f_i sont des solutions dans $H^1(\Omega)$ des problèmes*

$$\left\{ \begin{array}{c} -\Delta f_i = 0 \ dans\ \Omega \\ f_i = 0 \ sur\ \Gamma_0 \ et\ f_i = constant\ sur\ \Gamma_i \ ,\ 1 \leq i \leq p \\ < \frac{\partial f_i}{\partial n}, 1 >_{\Gamma_k} = \delta_{i,k}, 1 \leq k \leq p \ et\ < \frac{\partial f_i}{\partial n}, 1 >_{\Gamma_0} = -1 \end{array} \right. \tag{2.41}$$

Preuve. Soit l'espace Θ^0 définie par

$$\Theta^0 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \ \mathbf{v} = \text{constant sur } \Gamma_i \ ,\ 1 \leq i \leq p\} \tag{2.42}$$

pour $1 \leq i \leq p$ le problème : trouve f_i dans Θ^0 telle que

$$\forall \mathbf{v} \in \Theta \ ,\ \int_\Omega \textbf{grad}\ f_i \cdot \ \textbf{grad}\ \mathbf{v} \ = v_{\backslash \Gamma_i} \tag{2.43}$$

admet unique solution, les fonction **grad** f_i sont dans **G** et linéairement dépendant, on considérons la fonction

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^{p} < \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} \ \text{grad}\ f_i \tag{2.44}$$

on observe que

$$\int_\Omega \textbf{div}\ \mathbf{w} \ \ \text{dx} \ =< \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 >_\Gamma = 0 \tag{2.45}$$

telle que **w** est dans **G**, il est claire que **u** vérifie les conditions (2.22) et (2.23), alors il existe un vecteur potentiel ψ_0 dans $H^1(\Omega)^3$ telle que

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \ \text{dx} \ = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \ \textbf{rot}\ \psi_0 \ \text{dx} \ = \int_\Omega \ \textbf{rot}\ \mathbf{u} \cdot \psi_0 \ \text{dx} + < \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \psi_0 >_\Gamma = 0 \tag{2.46}$$

donc **u** est égal 0 . ■

Corolaire :

Dans l'espace U, la semi norme

$$w \rightarrow \| \ \textbf{rot}\ w \|_{L^2(\Omega)^3} + \| \ \textbf{div}\ \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{p} |< w \cdot n, 1 >_{\Gamma i}| \tag{2.47}$$

est une norme équivalente à la norme de **U**

Preuve. (théorème 18) ([3])

On suppose que ψ vérifie les conditions (2.38),(2.39) et (2.40). Soit la fonction $\mathbf{u} = \textbf{rot}\ \psi$, il est claire que la divergence de **u** est nulle ; de plus, pour tout χ dans $H^2(\Omega)$ d'après les formules (1.30) et(1.33) on a

$$\int_\Omega \ \textbf{rot}\ \psi \cdot \ \textbf{grad}\ \chi =< u \cdot n, \chi >_\Gamma \tag{2.48}$$

$$\int_\Omega \textbf{rot } \psi \cdot \textbf{ grad } \chi = - < \psi \times n, \textbf{ grad } \chi >_\Gamma \tag{2.49}$$

Comme $\psi \times n$ est nulle Ω, et par la densité on peut vérifie que $\textbf{rot } \psi \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ donc rot ψ dans $H_0(div, \Omega)$ alors d'après le lemme (6) $\textbf{rot } \psi \cdot \mathbf{n}$ est dans $H^{\frac{-1}{2}}(\Sigma_k)$ pour $1 \leq k \leq p$; l'espace $D(\Sigma_k)$ est dense $H^{\frac{-1}{2}}(\Sigma_k)$ alors on peut prend $\mu = 1$ dans (2.16) on trouve

$$< \text{ rot } \psi \cdot n, 1 >_{\Sigma_k} = 0 \tag{2.50}$$

.

Inversement, pour tout u vérifiée la condition (2.36) et (2.37), et associe la fonction ψ_0 d'après le lemme (5). On introduisons l'espace suivent

$$H^* = \{w \in H, \text{ div } w = 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } < w \cdot n, 1 >_{\Sigma_k} = 0 \ , \ 1 \leq k \leq m\} \tag{2.51}$$

De plus le problème, trouver ζ dans H^* telle que

$$\forall \varphi \in H^* \ , \ \int_\Omega \textbf{rot } \zeta \cdot \textbf{ rot } \varphi dx = \int_\Omega \psi_0 \cdot \textbf{ rot } \varphi dx - \int_\Omega \textbf{rot } \psi_0 \cdot \varphi dx \tag{2.52}$$

admet unique solution. Maintenant on va prolonger la formule (2.52) pour tout fonction de test sur $\mathbf{V}$. Pour tout fonction $\tilde{\varphi}$ dans $\mathbf{V}$, on définie la fonction χ dans $H^1(\Omega)$ comme la solution de problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta \chi = \textbf{div } \tilde{\varphi} \text{ , dans } \Omega \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.53}$$

On pose que

$$\varphi = \tilde{\varphi} - \textbf{ grad } \chi + \sum_{i=1}^{m} < \tilde{\varphi} - \textbf{ grad } \chi, 1 >_{\Sigma_i} \tilde{\textbf{grad}}\ q_i \tag{2.54}$$

On observe que φ est dans H^* et d'après la condition (2.36) et (2.37) on a :

$$\int_\Omega \textbf{rot } \psi_0 \cdot \textbf{ grad } \chi dx = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \text{ grad } \chi = 0 \tag{2.55}$$

et d'après (2.36) (2.37) et (2.16) on a :

$$\int_\Omega \textbf{rot } \psi_0 \cdot \tilde{\textbf{grad}}\ q_i dx = \int_{\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \textbf{ grad } q_i dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [q_i]_{\Sigma_i} < \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 >_{\Sigma_i} = 0$$

Donc on a

$$\forall \tilde{\varphi} \in \mathbf{V}, \ \int_\Omega \text{rot } \zeta \cdot \textbf{ rot } \tilde{\varphi} dx = \int_\Omega \psi_0 \cdot \text{ rot } \tilde{\varphi} dx - \int_\Omega \text{rot } \psi_0 \cdot \tilde{\varphi} dx$$

ce qui implique que la fonction

$$\psi = \psi_0 - \textbf{ rot } \zeta - \sum_{i=1}^{p} < \psi_0 - \textbf{ rot } \zeta \cdot n, 1 >_{\Gamma_i} f_i$$

est dans $X(\Omega)$ et vérifie les condition (2.38)(2.39) et (2.40). ■

2.4 Autre type de vecteur potentiel

Nous avons présenter ici un autre type de vecteur potentiel .

Théorème 19 *([3]) Soit Ω un domaine de classe C^1, si u une fonction de $H(div,\Omega)$ vérifiée les condition suivants*

$$div\ u = 0 \ sur\ \Omega \ et\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 sur \mathit{\Gamma}$$

$$< \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}, 1 >_{\Sigma_k} = 0 \ ,\ 1 \leq k \leq m$$

Si et seulement si il existe un vecteur potentiel ψ de $H^1(\Omega)^3$ telle que

$$\boldsymbol{u} = \ \boldsymbol{rot}\ \psi \ sur\ \Omega \ et\ \boldsymbol{div}(\Delta\psi) = 0 \ sur\ \Omega$$

$$\psi = 0 \ sur\ \mathit{\Gamma}$$

$$< \frac{\partial\psi}{\partial n}\cdot n, 1 >_{\mathit{\Gamma}_i} = 0, 1 \leq i \leq p$$

de plus ψ est unique .

La condition **div** $(\Delta\psi) = 0$ signifie que $\Delta($ **div** $\psi) = 0$ donc l'expression $< \frac{\partial\psi}{\partial n}\cdot n, 1 >_{\mathit{\Gamma}_i}$ admet une sens.
Comme les deux section précédentes, on introduisons l'espace suivent $\mathbf{L} = \{w \in H_0^1(\Omega)^3$ **, rot w** $= 0$ **, div w** $= 0$ sur $\Omega\}$

Proposition 9 *([3]) Soit Ω un domaine de classe C^1, la dimension de l'espace L est égal p et admet une base grad q_i^0 telle que pour tout $1 \leq i \leq p$ la fonction q_i^0 est la solution unique dans $H^2(\Omega)$ de problème suivant*

$$\begin{cases} \Delta^2 q_i^0 = 0 \ sur\ \Omega \\ q^0_{i\backslash\mathit{\Gamma}_0} = 0 \ et\ q^0_{i\backslash\mathit{\Gamma}_k} = \ constant\ 1 \leq k \leq p \\ < \frac{\partial q_i^0}{\partial n}, 1 >_{\mathit{\Gamma}_k} = \delta_{i,k} \ ,\ 1 \leq k \leq p \ et\ < \frac{\partial(\Delta q_i^0)}{\partial n}, 1 >_{\mathit{\Gamma}_0} = -1 \end{cases} \tag{2.56}$$

Preuve. On introduisons l'espace suivant

$$\Theta^{00} = \{v \in H^2(\Omega), v_{\backslash\mathit{\Gamma}_0} = 0 \text{ et } v_{\backslash\mathit{\Gamma}_i} = \text{ constant } 1 \leq i \leq p \ ,\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \mathit{\Gamma}\}$$

Pour tout $1 \leq i \leq p$ le problème : trouver q_i^0 dans Θ^{00} telle que

$$\forall v \in \Theta^{00} \ ,\ \int_\Omega \Delta q_i^0 \cdot v dx = -v_{\backslash\mathit{\Gamma}_i}$$

admet unique solution, de plus d'après la formule de Green suivante, si q et r dans Θ^{00} telle que $\Delta^2 q$ dans $L^2(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega (\Delta^2 q) r dx = \int_\Omega \Delta q \Delta r dx + \sum_{i=1}^{p} r_{\backslash\mathit{\Gamma}_i} < \frac{\partial(\Delta q)}{\partial n}, 1 >_{\mathit{\Gamma}_i}$$

Si q_i^0 vérifie les condition (2.56) et donc les solution sont **grad** q_i^0 et les q_i^0 sont linéairement indépendance .
Finalement, on va démontrer que pour tout w de L on a

$$w = \sum_{i=1}^{p} < \frac{\partial(\ \mathbf{div}\ w)}{\partial n}, 1 >_{\Gamma_i} \text{ gard } q_i^0$$

On pose que

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}\ - \sum_{i=1}^{p} < \frac{\partial(\ \text{div}\ w)}{\partial \mathbf{n}}, 1 >_{\Gamma_i} \textbf{ gard } q_i^0$$

On a

$$< \frac{\partial(\ \mathbf{div\ w})}{\partial n}, 1 >= 0\ ,\ 0 \le i \le p$$

de plus, la fonction **grad(div u)** vérifie la condition (2.7) alors le théorème (2.17) implique que il existe un vecteur potentiel μ dans $X(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{grad(\ div\ \ u)} = \ \mathbf{rot}\ \mu\ ,\ \mathbf{div}\mu = 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } \mu \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Donc

$$\int_\Omega (\ \text{div}\ u)^2 dx = -\int_\Omega u \cdot \mathbf{grad(\ div\ u)} dx$$
$$= -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot\ \mathbf{rot}\ \mu dx = -\int_\Omega \ \mathbf{rot\ u} \cdot \mu dx = 0$$

Car **u** est dans L, donc div u $= 0$ et u est dans $H \bigcap G$ ce qui implique que u est égal 0 . ■

Preuve. (théorème 19) voir Armouche et Bernardi page 28 ■

Chapitre 3

Les champs de Beltrami

Maintenant nous avons étudie le problème qui nous intéressons le problème des champs de Beltrami, un champs Beltrami est un champs de vecteur qui vérifie le système

$$\textbf{rot}\ \ \mathbf{B} = \alpha\mathbf{B} \textbf{ et } \textbf{div}\ \mathbf{B} = 0 \text{ sur } \Omega \tag{3.1}$$

telle que Ω un domaine vérifie les hypothèses de chapitre 2 et α est une valeur réel connue ou inconnue. On peut remarquer que nous allons deux cas si α un constant réel ou une fonction a valeur réel. On pose que les fonction q_i(resp f_i) sont la base de H(resp G) et on suppose que α un réel connue et non nulle (dans le cas $\alpha = 0$ correspond a la théorie classique de vecteur potentiel)

Lemme 8 *([2]) Pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de $L^2(\Omega)^3$ qui vérifie*

$$\boldsymbol{div}\ v = 0$$

Alors on a

– *Si $\boldsymbol{v}$ est dans $\boldsymbol{V}$ alors*

$$P_H v = \sum_{i=1}^{m} (\int_{\Sigma_i} \boldsymbol{v} \cdot nds) q_i$$

– *si $\boldsymbol{v}$ est dans $\boldsymbol{G}$ alors*

$$P_G v = \sum_{i=1}^{p} (\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds) f_i$$

On peut remarquer que l'application

$$v \to \|v\|_{\mathbf{V}} = (\| \textbf{ rot } v\|_{0,\Omega}^2 + \| \textbf{ div } v\|_{0,\Omega}^2 + \|P_{H(v)}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$$

(resp $\mathbf{v} \to (\| \textbf{ rot } v\|_{0,\Omega}^2 + \| \textbf{ div } v\|_{0,\Omega}^2 + \|P_G(v)\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$) est une norme équivalente a la norme de $\mathbf{V}$(resp $\mathbf{U}$). on va définir maintenant les constants

$$\alpha_0(\Omega) = \inf_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}}{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}} \tag{3.2}$$

$$\alpha_1(\Omega) = \inf_{v\in v, v\neq 0} \frac{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{U}}}{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}} \tag{3.3}$$

$\alpha_0(\Omega)$ et $\alpha_1(\Omega)$ sont deux constants positives et non nulle . On considérons le système suivant

$$\begin{cases} \textbf{rot } B = \alpha \mathbf{B} \\ \textbf{div } B = 0 \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{g} \\ \int_{\Gamma}(\mathbf{B}\times\mathbf{n})\cdot q_i \; dx = \alpha a_i \;, i = 1...m \end{cases} \tag{3.4}$$

Telle que $(a_1, a_2, .., a_m) \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on remarque que $\mathbf{g}$ est vérifie les conditions de compatibilité suivantes

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{g} \; ds = 0 \;, \; i = 0...p \tag{3.5}$$

De plus, si $\mathbf{B} \in H^1(\Omega)^3$ est la solution de (3.4), pour tout $0 \leq i \leq p$, soit k_i une fonction de $D(\mathbb{R}^3)$ satisfais $k_i(r) = \delta_{i,j}$ au voisinage de Γ_i on a

$$\textbf{rot } (k_i\mathbf{B}) = \alpha k_i \mathbf{B} + \textbf{ grad } k_i \times \mathbf{B}$$

Alors

$$\alpha \int_{\Gamma_i} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \; ds = \int_{\Gamma} \textbf{ rot } k_i \; \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \; = \int_{\Omega} \textbf{ div rot } (k_i \; \mathbf{B}) \; dx = 0$$

On peut remarquer que la condition aux limites

$$\alpha a_i = \int_{\Gamma} (\mathbf{B}\times\mathbf{n})\cdot q_i \; ds = \int_{\Omega} \textbf{ rot } B\cdot q_i \; dx = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{B}\cdot q_i \; dx$$

Signifie la projection orthogonale de $\mathbf{B}$ sur H.

3.1 Résultat général d'existence et unicité

Dans cette partie nous avons étudier l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de problème (3.4).

3.1.1 Problème équivalent

([2]) Pour tout $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vérifie la condition (3.5) et $(a_1, a_2, .., a_m) \in \mathbb{R}^m$, on définit le vecteur potentiel $B_0 \in H^1(\Omega)^3$ par $B_0 = \nabla\varphi_0 - \sum_{i=1}^m a_i q_i$, telle que $\varphi_0 \in H^2/R$ la solution de problème de Neumann suivant

$$\Delta\varphi_0 = 0 \text{ sur } \Omega \;, \; \frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma \tag{3.6}$$

On remarque que B_0 satisfaite

$$\textbf{rot } B_0 = 0 \textbf{ , div } B_0 = 0 \text{ , } B_0 \cdot n = g \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_\Omega B_0 \cdot q_i dx = -a_i \text{ pour } i = 1, ..., m$$

On définie maintenant l'énergie $E_0 \geq 0$ par :

$$E_0 = \|B_0\|^2_{0,\Omega} = \|\nabla \varphi_0\|^2_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{m} a_i^2. \tag{3.7}$$

Si $\mathbf{B} \in H^1(\Omega)^3$ est une solution de (3.4) si et seulement si $\mathbf{b} = \mathbf{B} - B_0$ dans $H^1(\Omega)^3$ est une solution de

$$\begin{cases} \textbf{rot } b = \alpha \mathbf{b} + \alpha B_0 \text{ sur } \Omega \\ \textbf{div } b = 0 \text{ sur } \Omega \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma \\ P_H b = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Supposons que $\mathbf{B} \in H^1(\Omega)^3$ est solution de (3.4) alors, $\mathbf{b} = \mathbf{B} - B_0$ est dans $\mathbf{V}$ et vérifie la première équation de problème (3.8), de plus

$$\alpha a_i = \int_\Gamma (\mathbf{B} \times \ \mathbf{n}) \cdot \ \mathbf{q}_i \ \mathrm{d}\sigma = -\int_\Omega \ \textbf{rot } B \cdot \ \mathbf{q}_i \ \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \alpha(\mathbf{b} + B_0) \cdot \mathbf{q}_i \ \mathrm{d} \ \Omega = -\alpha(P_H b, q_i) + \alpha a_i$$

Donc $P_H b = 0$. Inversement, il est claire que $\mathbf{b}$ est solution de (3.8) alors $\mathbf{B}$ est une solution de (3.4). Pour trouver une autre formulation de problème (3.8), nous introduisons l'espace suivant

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \ \textbf{div } v = 0 \text{ et } < \mathbf{v}.\mathbf{n}, 1 >_{\Gamma_i} = 0, 1 \leq i \leq p\} \tag{3.9}$$

L'espace $\mathbf{X}$ est un sous espace fermé de $H(div, \Omega)$, alors est un espace de Hilbert pour la norme induite de $L^2(\Omega)^3$

On considère le problème suivant : pour $\mathbf{j} \in \mathbf{X}$, trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ telle que

$$\textbf{rot } u = \mathbf{j} \textbf{ , div } u = 0 \textbf{ , } \mathbf{P}_H u = 0 \tag{3.10}$$

Lemme 9 *([2]) $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ est une solution de (3.10) si et seulement si $\boldsymbol{u}$ est une solution de problème variationnelle suivant*

$$(\textbf{\textit{rot}} \ u, \ \textbf{\textit{rot}} \ v) + (\textbf{\textit{div}} \ u, \ \textbf{\textit{div}} \ v) + (\boldsymbol{P}_H u, \boldsymbol{P}_H v) = (\boldsymbol{j} \ , \textbf{\textit{rot}} \ v) \ , \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \tag{3.11}$$

De plus, le problème variationnelle admet un et une seule solution $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, et il existe un constant C telle que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \|\boldsymbol{j}\|_{0,\Omega} \tag{3.12}$$

Preuve. Il est claire que La première implication est vérifiée. Inversement, si **u** est une solution de (3.8) alors, on pose que $v = P_H u$ dans (3.11) on trouve que $P_H u = 0$; d'autre part, soit $\varPhi$ la solution de problème de Neumann :

$$\Delta\varPhi = \textbf{ div u } \text{ sur } \Omega \ , \ \frac{\partial\varPhi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \varGamma$$

Ce problème admet unique solution dans $H^1(\Omega)/R$ alors d'après la formule de Green on a $< \textbf{div } u, 1 >= 0$,maintenant, On pose $v = \nabla\varPhi$ dans (3.11) on obtenons $\textbf{div } v = 0$

Finalement on va prouver que $\textbf{rot}u = \mathbf{j}$ soit $\mathbf{w} = \textbf{rot } u - \mathbf{j}$ alors $\textbf{div } \mathbf{w} \ = 0$ et (3.11) implique que

$$\textbf{rot } \mathbf{w} = 0, < \mathbf{w} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} >_{\varGamma} = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

De plus $< \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 >_{\varGamma_i} = < \textbf{rot } u \cdot \mathbf{n}, 1 >_{\varGamma_i} - < j.n, 1 >_{\varGamma_i} = 0$. Alors $\mathbf{P}_G u = 0$ donc $\mathbf{w} \ = 0$

L'existence et l'unicité de la solution est une conséquence direct de théorème de Lax-Milgram . ■

Le lemme précédente permettre de définir un opérateur linéaire borné

$$K : j \in X \to u \in X \text{ une solution du problème (3.10)}$$

D'après le lemme (9) l'opérateur linéaire $\mathbf{j} \in \mathbf{X} \to \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ solution de (3.8) est continue, grâce a l'injection compact $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, injection de $\mathbf{V} \ \hookrightarrow \mathbf{X}$ est compact ; donc nous allons le lemme suivante

Lemme 10 *([2]) L'opérateur* $\boldsymbol{K}$ *est compact*

On peut récrire le système (3.5) sous la forme suivante

$$\text{trouver } b \in \mathbf{X} \text{ telle que } \mathbf{b} - \alpha\mathbf{v} = \alpha\mathbf{K}B_0 \tag{3.13}$$

Pour utiliser L'alternative de Fredholm nous avons besoin de caractériser l'adjoint de l'opérateur K.

3.1.2 Le problème d'adjoint

[2] Le théorème (18) traite l'existence de vecteur potentiel pour les éléments de $H(div, \Omega)$; particulièrement, pour tout $\mathbf{j} \in \mathbf{V}$ nous allons la décomposition de Weyl-Helmoltz, sous la forme suivante

$$\mathbf{j} \ = \nabla s + \sum_{i=1}^{m} c_i q_i + \textbf{ rot } \varPhi \tag{3.14}$$

Cette décomposition est unique, telle que $\mathbf{s} \in H^1(\Omega)/R$ est la solution de problème de Neumann $\Delta s = 0$ sur Ω et $\frac{\partial s}{\partial n} = j \cdot n$ sur $\mathit{\Gamma}$ et les constants c_i sont donner par

$$c_i = \int_{\Sigma_i} (\mathbf{j} - \nabla s) \cdot \mathbf{n} ds$$

Le vecteur potentiel est vérifié

$$\text{div } \mathit{\Phi} = 0, \mathit{\Phi} \times \mathbf{n} = 0, \int_{\Gamma_i} \mathit{\Phi} \cdot n \text{ d}\sigma = 0, 1 \leqslant i \leqslant p$$

$\mathit{\Phi}$ existe et vérifie les conditions de théorème (18), il est caractériser par le problème variationnelle suivant

Lemme 11 *([2]) Pour tout* $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{X}$*, le vecteur potentiel* $\mathit{\Phi}$ *dans la décomposition (3.14) est la solution unique dans* $\boldsymbol{U}$ *de problème variationnelle :*

$$(\boldsymbol{rot}\ \mathit{\Phi}, \boldsymbol{rot}\ v) + (\boldsymbol{div}\ \mathit{\Phi}, \boldsymbol{div}\ v) + (P_G\mathit{\Phi}, P_G v) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{rot}\ v) \tag{3.15}$$

Maintenant, On considère l'opérateur

$$K^* : \mathbf{j} \in \mathbf{X} \rightarrow \mathit{\Phi} \in \mathbf{X} \text{ solution de } (3.14)$$

Lemme 12 *([2]) L'opérateur* K^* *est compact*

Preuve.
Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux éléments de $\mathbf{X}$ .telle que $\mathbf{v}$ est écrire sous la forme

$$\mathbf{v} = \nabla s + \sum_{i=1}^{m} c_i q_i + \mathbf{rot}\ (K^* v).$$

$$\int_\Omega \mathbf{Ku} \cdot \mathbf{v} \text{ d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{Ku}[\nabla s + \sum_{i=1}^{m} c_i q_i + \mathbf{rot}\ (K^* v)] \text{ d}\Omega$$

$$\int_\Omega \mathbf{Ku} \cdot \nabla s = -\int_\Omega \mathbf{div}\ (Ku) \cdot s \int_\Gamma \mathbf{s(Ku)} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\int_\Omega \mathbf{Ku} \cdot q_i =< P_H \mathbf{Ku}, q_i >= 0 \text{ pour } i = 1, ..., p$$

On trouve

$$\int_\Omega \mathbf{Ku} \cdot\ \mathbf{v} \text{ d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{Ku} \cdot\ \mathbf{rot}\ (K^* \text{ d}\sigma = \int_\Omega \mathbf{rot}\ (Ku) \cdot K^* v \text{ d}\sigma = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot K^* \mathbf{v} \text{ d}\Omega$$

Alors K^* est l'opérateur adjoint de $\mathbf{K}$
■

L'équation homogène d'adjoint s'écrit sous la forme

$$\text{trouver } \varphi \text{ sur } \mathbf{X} \text{ qui vérifie } : (Id - \alpha K^*)\varphi = 0 \tag{3.16}$$

On peut même écrire le problème (3.14) sous la forme : trouver $\varphi \in \mathbf{X}$, $\mathbf{s} \in H^1(\Omega)/R$, $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$ telle que

$$\nabla s + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i + \mathbf{rot}\ \varphi = \varphi, \varphi \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \mathit{\Gamma} \tag{3.17}$$

Remarque 5 *On peut prouver que si φ est la solution de problème homogène d'adjoint si et seulement si $\varphi \in \boldsymbol{X}$ et*

$$\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{rot}\ \varphi - \ \boldsymbol{rot}\ \varphi = 0, \varphi \times n = 0 \ sur\ \mathit{\Gamma} \tag{3.18}$$

Le système (3.17) signifie que $K^*(\boldsymbol{rot}\ \varphi - \alpha\varphi) = 0$, d'après le lemme (11) , $\boldsymbol{div}\ \varphi = 0$ et

$$(\boldsymbol{rot}\ \varphi - \alpha\varphi, \boldsymbol{rot}\ v) = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$$

Donc il est équivalent a (3.18)

3.2 Alternative de Fredholm

([2]) l'opérateur $\mathbf{K}$ est compact alors l'adjoint K^* est compact aussi, le théorème de Riesz Fredholm dit que le problème homogène direct et adjoint admet deux espaces des solutions de dimension fini, Le lemme suivante exprime la relation entre leurs solutions.

Lemme 13 *([2]) Soit φ est la solution de problème homogène d'adjoint*

$$\varphi - \alpha \boldsymbol{K}^* \varphi = 0 \tag{3.19}$$

Alors $\boldsymbol{rot}$ φ est la solution de problème direct homogène

$$\zeta - \alpha \boldsymbol{K}\ \zeta = 0 \tag{3.20}$$

De plus, si ζ est la solution de (3.20) alors il existe un vecteur unique φ dans $\boldsymbol{X}$ solution de (3.19)telle que $\zeta = \boldsymbol{rot}\ \varphi$.

Preuve.
Soit φ solution de problème (3.17), alors φ est la solution de (3.16) donc on a

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \varphi = \alpha \mathbf{rot}\ \varphi$$

De plus, $\mathbf{rot}\ \varphi$ est de divergence nulle et satisfait

$$\mathbf{rot}\ \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Sigma_i} \mathbf{rot}\ \varphi \cdot nds = 0$$

Donc $\mathbf{rot}\ \varphi$ est un solution de problème direct homogène.
Inversement, si ζ est la solution de (3.20) alors $\mathbf{div}\ \zeta = 0$ et $P_H\zeta = 0$, si on pose que $\varphi = K^*\zeta \in X$ donc $\zeta = \text{rot } \varphi$ et φ vérifie (3.17) ■

On observe que le problème direct homogène admet une solution non trivial si et seulement si $1/\alpha$ dans $\sigma(K)$. Comme $\mathbf{K}$ est compact alors $\sigma(K)$ contenant 0 et $\sigma(K)/0$ est un ensemble vide, finie ou une suite des valeurs propres dans $[-\|\mathbf{K}\|, +\|\mathbf{K}\|]$. Pour répondre a ce question nous allons le lemme suivant

Lemme 14 *([2]) L'opérateur **S** définit dans l'espace de Hilbert*

$$X_1 = \{v \in X, v \cdot n = 0 \ sur\ \Gamma, P_H v = 0\}$$

Par $\boldsymbol{S}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{rot}\ u$ pour $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{D(S)} = \{\boldsymbol{v} \in X_1,\ \boldsymbol{rot}\ u \in X_1\}$ est un auto adjoint et sa valeurs spectral former une suite des valeurs propres

Pour tout vecteur propre de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{D(S)}$ est un vecteur propre de $\mathbf{S}$ avec un inverse valeur propre. Conséquence

$$\sigma(K) = 0 \cup \{1/\mu, \mu \in \sigma(S)\} \subset [-\|\mathbf{K}\|, +\|\mathbf{K}\|] \tag{3.21}$$

• $1/\alpha \notin \sigma(K)$, alors le problème direct non homogène admet un et une seule solution (le problème direct et adjoint homogène n'admet aucune solution non trivial)
• $1/\alpha \in \sigma(K)$, alors le problème homogène d'adjoint(3.16) admet un espace des solutions non triviaux de dimension fini. Le problème non homogène est résoluble si et seulement si $K(B_0)$ est satisfait

$$\int_\Omega K(B_0) \cdot \Psi dx = 0 \tag{3.22}$$

Pour tout Ψ est une solution de (3.14). Si la condition (3.22) est satisfait alors la solution général de problème (3.13) écrire sous la forme

$$b = \tilde{b} + \text{rot } \Psi$$

Telle que $\tilde{b}$ est la solution particulière et Ψ est la solution de problème (3.14)

Maintenant, on va donner une autre écriture de la condition de résolubilité, soit $(\Psi, s, \gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m))$ la solution de (3.17) alors

$$(KB_0, \Psi) = (B_0, K^*\Psi)$$

$$= \frac{1}{\alpha}(B_0, \nabla s + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i + \text{rot } \frac{\Psi}{\alpha})$$

$$= \frac{1}{\alpha}(\int_\Gamma sB_0 \cdot n d\sigma + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \int_\Omega \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{q}_i)$$

$$= \frac{1}{\alpha}(\int_\Gamma s\ g d\sigma - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_i)$$

Donc, on peut écrire la condition (3.22) sous la forme

$$\int_\Gamma sg\ d\sigma - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_i = 0$$

Théorème 20 *([2]) Il existe une suite des valeurs réel* $\{\alpha_i, i \in N\}$ *vérifiée*

- $\forall i \in N\ ,\ |\alpha_i| \geq \alpha_0$
- *la suite* α_i^{-1} *est converge vers 0*

Telle que

- *Si* $\alpha \notin \{\alpha_i, i \in N\}$*(particulièrement si* $|\alpha| > \alpha_i$ *) donc le problème (3.4) admet un et une seule solution* $\boldsymbol{B} \in H^1(\Omega)^3$ *pour tout* $\boldsymbol{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *vérifiée (3.4) et* $(a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$
- *Si* $\alpha = \alpha_i$*, alors le problème homogène d'adjoint (3.16) admet un espace des solution de dimension fini, et le problème (3.4) est résoluble si et seulement si* $\boldsymbol{g}$ *et* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ *vérifiés la condition*

$$\int_\Gamma \boldsymbol{s}\ \boldsymbol{g}\ d\sigma - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_i = 0 \tag{3.23}$$

Pour tout $(\varphi, s, (a_1, a_2, .., a_m))$ *solution de (3.17). Si la condition (3.23) est vérifie alors le problème (3.4) admet une solution général sous la forme*

$$\boldsymbol{B} = \tilde{B} + \boldsymbol{rot}\ \Psi$$

Telle que $\tilde{B}$ *est une solution particulière et* Ψ *la solution de problème homogène d'adjoint (3.14)*

3.3 La régularité de la solution

Lemme 15 *([2]) Supposons* Γ *de classe* C^{m+1} *pour tout* $m \geq 0$ *alors*

$$H^{m+1}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3, \boldsymbol{div}\ v \in H^m(\Omega), \boldsymbol{rot}\ v \in H^m(\Omega)^3\}$$

Corolaire : Supposons que Γ est de classe C^m et $\mathbf{g} \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour tout $m \geq 0$ alors $\mathbf{B} \in H^{m+1}(\Omega)$, de plus $\mathbf{B} - B_0 \in H^{m+2}(\Omega)$.

3.4 Formulation variationnelle et estimation d'énergie

Si $|\alpha| < \alpha_0$, alors on peut trouve une formulation variationnel du problème (3.8)

Lemme 16 *([2]) Si $|\alpha| < \alpha_0$ alors $\boldsymbol{B}$ est une solution de (3.4) si et seulement si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0$ solution du problème variationnelle*

$$(\boldsymbol{rot}\ b - \alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{rot}\ v) + (\boldsymbol{div}\ b, \boldsymbol{div}\ v) + (P_H b, P_H v) = (\alpha B_0, \boldsymbol{rot}\ v) \tag{3.24}$$

De plus, ce problème admet une seule solution $\boldsymbol{B} \in H^1(\Omega)^3$ et on a l'estimation suivante

$$E_0 \leq \|\boldsymbol{B}\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{1 - r^2} E_0 \tag{3.25}$$

Telle que $\boldsymbol{r} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$

Preuve.
Il est claire que, si $\mathbf{B}$ est une solution du problème (3.4) alors $\mathbf{b}$=$\mathbf{B}$-$\mathbf{B}_0$ est une solution de (3.24) ; Inversement, si $\mathbf{b}$ est une solution de (3.24) alors on a $\mathbf{P}_H \mathbf{b} = 0$ et $\mathbf{div}\ \mathbf{b} = 0$
Maintenant on va démontrer que $\mathbf{rot}\ \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} = \alpha B_0$, le vecteur $\mathbf{b} - \mathbf{B}_0$ satisfait les conditions de théorème (17) alors il existe un vecteur $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{rot}\ A = \mathbf{b} - B_0$ et $\mathbf{div}\ A = 0, \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$; si on prend $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \alpha \mathbf{A}$ dans (3.24) on trouve que $\mathbf{rot}\ b - \alpha \mathbf{b} = \alpha B_0$.
L'existence et l'unicité de la solution du problème variationnelle est une conséquence direct de théorème de Lax Milgram l'application $a(,)$ dans (3.24) est une forme bilinéaire et vérifie $|\mathbf{a(v,v)}| \geq (1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}) \|v\|_V^2\ \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Si $(B_0, \mathbf{b}) = 0$ on trouve

$$(\mathbf{rot}\ b, \mathbf{b}) = \alpha \|\mathbf{b}\|_{0,\Omega}$$

de plus

$$\alpha^2 \|B_0\|_{0,\Omega}^2 = \|\mathbf{rot}\ b - \alpha \mathbf{b}\|_{0,\Omega}^2 = \|\mathbf{rot}\ b\|_{0,\Omega}^2 - \alpha^2 \|\mathbf{b}\|_{0,\Omega}^2 \geq (\alpha_0^2 - \alpha^2) \|\mathbf{b}\|_{0,\Omega}^2$$

mais

$$\|\mathbf{B}\|_{0,\Omega}^2 = \|\mathbf{b}\|_{0,\Omega}^2 + \|B_0\|_{0,\Omega}^2.$$

Donc $\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2 - \alpha^2}\ \mathrm{E}_0$. ■

Remarque 6 *Si α n'est pas une fonction constant, le problème variationnelle (3.24) n'est pas en générale équivalente de problème (3.8), mais on peut poser une autre formulation de problème(3.8), on suppose que*

$$\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{(x)}(\boldsymbol{B} + B_0) + \nabla p$$

alors on a

$$\Delta p = \boldsymbol{div}\ (\alpha B) = \nabla p \cdot B$$

Donc si α est constant alors p est nulle .

3.5 Formulation de Vecteur potentiel

Dans cette partie on va donner une formulation variationnelle basé sur le vecteur potentiel. Soit $d = (d_1, d_2, .., d_p) \in \mathbb{R}^d$, on peut trouver un vecteur $\Phi \in \mathbf{v}$ qui vérifie **rot** $\Phi = \mathbf{v}$ telle que **b** est solution de (3.8). La proposition suivant démontrer que Φ est l'unique solution du problème variationnelle :

Proposition 10 *([2]) Si $|\alpha| < \alpha_1$,**b** est solution de (3.8) si et seulement si Φ est une solution du problème variationnel*

$$(\boldsymbol{rot}\ \Phi, \boldsymbol{rot}\ v - \alpha v) + (\boldsymbol{div}\ \Phi, \boldsymbol{div}\ v) + (\boldsymbol{P}_G\Phi, \boldsymbol{P}_G v) = \alpha(B_0, v) + \sum_{i=1}^{p} d_i(f_i, \boldsymbol{P}_G v) \tag{3.26}$$

Preuve. Si **b** est la solution de problème (3.8) alors Φ est une solution de (3.26) ; inversement, l'application

$$\mathbf{a(u,v)} = (\mathbf{rot}\ u, \mathbf{rot}\ v - \alpha v) + (\mathbf{div}\ u, \mathbf{div}\ v) + (\mathbf{P}_G u, \mathbf{P}_G v)$$

est continue et coercive dans **U** ,si $|\alpha| \leq \alpha_0$ d'après le théorème de Lax-Milgram le problème (3.26) admet un et une seule solution dans **U** telle que il est nécessaire que ϕ le vecteur potentiel de la solution de problème (3.4) ■

Bibliographie

[1] Viette Girault- Arnaud Raviart : Finite Element Methods For Navier-Stokes Equation theory and Algorithms,

[2] Boulmeza-Maday-Amari : On the Linear Force-Free Fields In Bounded or Unbounded Three-Dimonsional Domains M 2AL, Vol. 33 N0 2, 1999, p. 359-393

[3] Amrouche-Bernardi : vector potential

[4] Brezis : Analyse fonctionnelle Théorie et applications 233(1999)

[5] T.Z.Boulmzaoud : Contribution à l'étude de certains problèmes en domaines non-bornes et aux équations de la magnétohydrostatique et de la magnétohydrodynamique

حقول Beltrami هي عبارة عن دوال ذات قيم شعاعية تحقق العلاقة التالية :

$rot\, B \times B = 0 \ldots\ldots\ldots.(1)$ لهذه العلاقة اهمية كبيرة في عدة ميادين من الفيزياء. الهدف من هذا العمل هو دراسة و جود و وحدانية حل العلاقة السابقة و هذا في مجال محدودو مترابط او بسيط الارتباط من اجل هذه الدراسة قمنا بتقسيم هذا العمل الى ثلاث فصول :

في الفصل الاول قمنا بدراسة فضاءات صوبولاف (Sobolev) H^m و بعض خصائصها (الكثافة و الاثر ...) . ثم انتقلنا الى دراسة بعض مسائل القطوع الناقصة الكلاسيكية (مسائل بواسون مع شروط دركلي و مسائل بواسون مع شروط نيمان) و في نهاية هذا الفصل قمنا بدراسة نظرية الطيف المؤثر المتراص (نظرية التناوب الخاصة ب فراد د لهوم) هذه النظرية تسمح لنا بدراسة هذا النوع من المعادلات $\mathbf{u - Tu = f}$

اما في الفصل الثاني قمنا بدراسة مسائل الشعاع الكموني الشعاع الكموني هو عبارة عن حقل شعاعي يحقق العلاق التالية : $v = rot$ و $div = 0$.

حيث v عبارة دالة من الفضاء $L^2\,()^3$ و لشعاع الكموني عدة انواع (الشعاع الكموني الناظمي ، الشعاع الكموني المماسي ...)

و في الفصل الاخير، قمنا بدراسة العلاق (1) و هذا عن طريق علاقات مكافئة لها ، هذه الدراسة سمحت لنا بتعريف مؤثر K مكافئ للعلاق (1) و باستعمال نظرية التناوب ل فرادلهوم قمنا بدراسة وجود الحل و وحدانيته. و لقد استعملنا الشعاع الكموني لنفس الغاية .

Résumé

Les champs de Beltrami sont des fonctions a valeurs vectorielle qui satisfait le système rot-div **rot** $B = \alpha B$, **div** $B = 0$ ce système joue un rôle important dans plusieurs domaines de la physique. Le bute de notre travail est l'étude de système précédent et les cas d'existence et d'unicité de la solution dans un domaine borne connexe ou simplement connexe. Nous avons partager notre étude a trois chapitre :

Le premier chapitre, on étude les espaces de Sobolev H^m et leurs propriétés (La traces, la densité...), on traite aussi quelques problèmes elliptique classique (problème de Poisson avec condition de Dirichlet et de Neumann).Enfin, de ce chapitre nous avons étudier la théorie spectral des opérateurs compact (L'alternative de Fredholm), cette théorème est une technique permet d'étude les équations sous la forme $u - Tu = f$.

Dans la deuxième chapitre, nous allons voir le problème de vecteur potentiel, le vecteur potentiel est un champs de vecteur qui vérifie le système suivant $v =$ **rot** φ, **div** $\varphi = 0$ telle que v est une fonction de $L^2(\Omega)^3$ à valeur vectoriel et on pose que le domaine Ω vérifie quelques hypothèses. Nous remarquons que si la solution existe elle est dans l'intersection de $H(rot, \Omega)$et $H(div, \Omega)$ c'est la couse que nous allons étudier l'intersection des espaces précédentes.dans ce chapitre nous allons trouve que le vecteur potentiel admet quelques types (a trace normale nulle, avec composants tangentiel nulle ...etc)

En dernier chapitre, on écris le système rot-div a une autre système homogène équivalent ; d'une autre façon qui permet de définir un opérateur K. L'objectif de l'opérateur K est de trouver une équation qui remplace le système rot-div ; comme l'opérateur K est compact, on peut utiliser les résultats de l'alternative de Fredholm pour étudier l'existence et l'unicité de la solution. on peut même utiliser le vecteur potentiel pour trouver une formulation variationnelle de problème rot-div. On finissons ce chapitre par une théorème général d'existence et d'unicité de la solution de système rot-div .

Abstract

In mathematics, Linear Force- free (or Beltrami) fields are Three-components divergence free fields solution of the equation $\textbf{curl } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$, where α is a real number. Such fields appear in many Branches of physics like astrophysics, fluid mechanics electromagnetics and plasma physics. We shall study here the existence uniqueness and regularity of Linear Force-free in a bounded domain connected or simply-connected.we will divide this project into three chapters

the first chapter , we present the Sobolev spaces $H^m$and we study our properties (trace , density and Green's formula....) and we will solve some problems Elliptic (Dirichlet ,Newmann's problem for the Laplace operator).

in the second chapter, we'll see the problem of the vector potential, the potential vector is one that satisfies the system $v = \textbf{ rot } \varphi, \textbf{div } \varphi = 0$, such that v is a vector valued function and we ask that the domain Ω verified some assumptions. The vector potentiel has many kind (Tangential vector potentials,Normal vector potentials....).

The third chapter , we'll study Linear force free fields , Linear force free is the solution of the problem $\textbf{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ with a divergence-free ; we write the previous system to another system equivalent homogeneous and we'll rewrite this system in to equation with operator compact K and we'll apply fredholm's theorem for studied the existence and uniqueness of the solution . We can also find another formulation of the system rot-div by the vector potentials