

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

**Centre Universitaire de Mila**

**Institut des Sciences et de la Technologie**

**Département de Mathématiques et Informatiques**

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence  
En: Filière Mathématiques Fondamentales**

# Estimation paramétrique

**Préparé par :**

**Benyoucef Samia**

**Djenhi Roukia**

**Ben mammari Salah eddine**

**Lakhdari Adel**

**Encadré par :**

**Mehazzem Allal**

**Grade.M.A.A**

**Année universitaire : 2013 /2014**

# Remerciements

*Nous tenons à remercier tout d'abord Dieu, le tout puissant pour la volonté et le courage qu'il nous a donné pour mener à terme ce travail.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur Monsieur Mehazzem Allal, qui nous encouragé en nous faisant part d'observations constructives et pour ses précieux conseils.*

*Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis Pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir encouragé tout au long de ces années.*

*En fin, Nous tenons à remercier toutes les amis au Département de mathématique et informatique, et ailleurs, pour leur disponibilité et leur soutien.*

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Echantillonnage</b>	<b>3</b>
1.1 Population et échantillon . . . . .	3
1.2 Echantillonnage . . . . .	4
1.2.1 Les différents types d'échantillonnage . . . . .	4
1.2.2 Théorie de l'échantillonnage . . . . .	5
1.2.3 Méthodes d'échantillonnage . . . . .	5
1.3 Quelques distributions d'échantillonnage . . . . .	7
1.3.1 La distribution d'échantillonnage de la moyenne . . . . .	7
1.3.2 La distribution d'échantillonnage de la variance . . . . .	9
1.3.3 La distribution d'échantillonnage de la médiane . . . . .	10
<b>2 Lois de probabilités</b>	<b>11</b>
2.1 Variables aléatoires discrètes . . . . .	11
2.1.1 Lois de probabilités de variables aléatoires discrètes . . . . .	12
2.2 Variables aléatoires continues . . . . .	13
2.2.1 Lois de probabilités de variables aléatoires continues . . . . .	14
<b>3 Estimation paramétrique</b>	<b>17</b>
3.1 Estimation ponctuelle et estimateurs . . . . .	17
3.1.1 Estimateur et estimation . . . . .	17
3.1.2 Propriétés d'un estimateur . . . . .	17
3.1.3 Exemples d'estimateurs de caractéristiques de position et de disper-	
sion . . . . .	19
3.1.4 Méthode des moments . . . . .	20
3.1.5 Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	21

3.2	Estimation par intervalle de confiance . . . . .	23
3.2.1	Principe . . . . .	23
3.2.2	Intervalle de confiance . . . . .	23
3.2.3	Intervalles de confiance pour une espérance . . . . .	24
3.2.4	Intervalles de confiance pour une variance . . . . .	25
	<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>

# Introduction

La notion de base en statistique est celle de population : ensemble d'individus (ou objets ou unités statistiques) pouvant être décrits par un ensemble des variables (ou propriétés ou caractéristiques) communes. La variabilité d'une population signifie que les variables décrivant les individus peuvent prendre des valeurs différentes d'un individu à l'autre. L'analyse statistique est l'étude de cette variabilité. Souvent, il est matériellement impossible d'étudier tous les individus d'une population. Si l'on se limite à une partie de la population, on fait un sondage, la partie étudiée s'appelle un échantillon. Afin d'assurer la représentativité de l'échantillon, on va voir estimation.

L'estimation statistique consiste à donner une valeur approchée à une caractéristique d'une population, à partir d'un échantillon d'observations issues de cette population. Nous nous intéressons dans un premier temps à l'estimation de paramètres de la population (espérance, variance, proportion...). Dans un second temps, nous chercherons à décrire de façon encore plus fine le comportement d'une population statistique en estimant la fonction de répartition et la densité de probabilité d'une variable aléatoire quantitative.

Ce mémoire est partagé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse échantillonnage, plus précisément on rappelle l'essentiels des définitions et les résultats qui seront utiles pour la suite de notre travail.

En suite, dans le deuxième chapitre on donne les lois de probabilités de variable aléatoire discrète et de variable aléatoire continue.

Enfin, dans le troisième chapitre nous allons donner l'estimation paramétrique, Estimation ponctuelle et estimateurs, propriétés d'un estimateur, méthodes des moments, méthode du maximum de vraisemblance, estimation par intervalle de confiance.

# Chapitre 1

## Echantillonnage

### 1.1 Population et échantillon

**Définition 1.1.1** *On appelle population  $\Omega$  de taille  $N$ , la totalité des unités de n'importe quel genre prises en considération par le statisticien. Elle peut être finie ou infinie.*

**Définition 1.1.2** *On appelle échantillon un sous\_ensemble d'une population  $\Omega$ . Un échantillon de taille  $n$  est une liste de  $n$  individus  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  extraits de la population mère.*

**Exemple 1.1.3** *On considère une population constituée de 5 étudiants et on s'intéresse au temps hebdomadaire consacré par chaque étudiant à l'étude des statistiques.*

<i>étudiant</i>	<i>temps d'étude (h)</i>
<i>A</i>	<i>7</i>
<i>B</i>	<i>3</i>
<i>C</i>	<i>6</i>
<i>D</i>	<i>10</i>
<i>E</i>	<i>4</i>

$$\Omega = \{A, B, C, D, E\}, \quad N = 5$$

Afin de définir la population et l'échantillon, on utilise des notations différentes, comme présente le tableau récapitulatif suivant :

	population	échantillon
Définition	C'est l'ensemble des unités considérées par le statisticien	C'est un sous_ensemble de la population choisie pour l'étude
Caractéristiques	Ce sont des paramètres	Ce sont des statistiques
Notations	$N$ = taille de la population ( si elle est finie)	$n$ = taille de l'échantillon
Si on étudie un caractère quantitatif	moyenne de la population $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	moyenne de l'échantillon $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Si on étudie un qualitatif	écart-type de la population $\sigma_{pop} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}$ proportion dans la population p	écart-type de l'échantillon $\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ proportion dans l'échantillon f

## 1.2 Echantillonnage

**Définition 1.2.1** On appelle échantillonnage le prélèvement d'échantillon. Le rapport  $t$  de l'effectif  $n$  de l'échantillon sur l'effectif  $N$  la population dans laquelle il a été prélevé, est appelé tout échantillonnage ou fraction de sondage :

$$t = \frac{n}{N}.$$

**Exemple 1.2.2** On prélève des échantillons de taille 2

$$t = \frac{2}{5} = 0.4.$$

### 1.2.1 Les différents types d'échantillonnage

**Définition 1.2.3** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Un échantillon aléatoire d'effectif  $n \geq 1$  est un vecteur aléatoire  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  à  $n$  composants qui sont  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que  $x$ , appelé variable aléatoire parente.

**Remarque 1.2.4** Pour des raisons de commodité, nous avons supposé que les  $x_i$  sont mutuellement indépendantes, dans certains cas, l'indépendance deux à deux suffisante.

**Définition 1.2.5** *Un échantillon non aléatoire est un échantillon sélectionné par une méthode non probabiliste.*

**Exemple 1.2.6** *Les manchots empereurs en captivité ou d'un zoo donnerait un échantillon non aléatoire.*

**Définition 1.2.7** *Un échantillon exhaustif est un échantillon pour lequel le tirage a été réalisé sans remise.*

**Exemple 1.2.8** *L'échantillon des 252 « haricots » du jardinier est un échantillon exhaustif, puisqu'une fois ramassé sur terrain, le « haricot » numéroté et mis de côté.*

**Définition 1.2.9** *Un échantillon non-exhaustif est un échantillon pour lequel le tirage a été réalisé avec remise.*

**Remarque 1.2.10** *Dans la pratique, la taille de l'échantillon est très souvent petite devant la taille de la population étudiées, c'est pour cela que les tirages effectués, en général sans remise, vont être assimilés à des tirages avec remise.*

## 1.2.2 Théorie de l'échantillonnage

La théorie d'échantillonnage se propose d'étudier les propriétés du vecteur aléatoire à  $n$  composantes et des caractéristiques le résumant, encore appelées statistiques, à partir de la distribution supposée connue de la variable parente  $x$  et d'étudier en particulier ce qui se passe lorsque la taille de l'échantillon est de plus en plus élevée. C'est généralement ce qui préoccupe les statisticiens bien que depuis quelques années des théories concernant les petits échantillons se développent également. Pour cela, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés sur la théorie des petits échantillons qui ne sera pas abordée.

## 1.2.3 Méthodes d'échantillonnage

Ensemble des méthodes permettant de réaliser un sondage (de prélever un échantillon de données) au sein d'une population, de manière à reproduire un échantillon aussi représentatif que possible de cette population. On a deux méthodes :

### Les méthodes empiriques

Les plus utilisées par les instituts de sondage. Leur précision ne peut pas être calculée et leur réussite dépend de l'expertise des enquêteurs.

## Echantillonnage sur la base du jugement

**Définition 1.2.11** *Un échantillon formé sur la base du jugement est un échantillon formé à partir de l'opinion d'une ou de plusieurs personnes suffisamment éclairées pour identifier les unités qui représentent adéquatement la population.*

**Exemple 1.2.12** *Une firme de mise en marché pose l'hypothèse d'un centre commercial particulier de Trois-Rivières donne des résultats représentatifs de la population québécoise.*

## Echantillonnage par la méthode des quotas

**Définition 1.2.13** *Un échantillon prélevé librement à condition de respecter une composition donnée à l'avance (sexe, âge, CSP, ...).*

*Pbme : repose sur la pertinence des catégories retenues.*

## Les méthodes aléatoires

### Echantillonnage aléatoire simple

**Définition 1.2.14** *L'échantillonnage aléatoire simple est une méthode pour laquelle tous les échantillons possibles (de même taille) ont la même probabilité d'être choisis et tous les éléments de la population ont une chance égale de faire partie de l'échantillon. Pour choisir les unités, on peut utiliser la «technique du chapeau» ou une table de nombres aléatoires.*

**Exemple 1.2.15** *Dans une classe de 20 personnes, on désire choisir un échantillon aléatoire simple de 5 individus. Le nombre de combinaisons possibles est donné par :*

$$c_5^{20} = \frac{20!}{5!15!} = 15504.$$

*Par conséquent, chaque combinaison doit avoir une probabilité de  $1/15504$  d'être choisie et chaque personne doit avoir une probabilité de  $5/20 = 1/4$  de se retrouver dans l'échantillon.*

### Echantillonnage aléatoire stratifié

**Définition 1.2.16** *L'échantillonnage stratifié est une méthode qui consiste d'abord à subdiviser la population en groupes homogènes (strates) pour ensuite extraire un échantillon aléatoire de chaque strate. Cette méthode suppose la connaissance de la structure de la population. Pour estimer les paramètres, les résultats doivent être pondérés par l'importance relative de chaque strate dans la population.*

## Echantillonnage par grappe

**Définition 1.2.17** *L'échantillonnage par grappe est une méthode qui consiste à choisir un échantillon aléatoire d'unités qui sont elles-mêmes des sous-ensembles de la population («grappes»). Cette méthode suppose que les unités de chaque grappe sont représentatives, elle possède l'avantage d'être souvent plus économique.*

## 1.3 Quelques distributions d'échantillonnage

### 1.3.1 La distribution d'échantillonnage de la moyenne

Supposons que dans une population infinie, on ait prélevé au hasard un premier échantillon de  $n$  observations :

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

et qu'on en ait calculé la moyenne

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

on ait prélevé un deuxième échantillon de même effectif

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$$

la moyenne correspondante est :

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i,$$

et pour les d'autres moyennes d'échantillon éventuellement prélevés dans les mêmes conditions :

$$x''_1, x''_2, \dots, x''_n, \quad x'''_1, x'''_2, \dots, x'''_n.$$

On peut considérer la suite infinie des premières observations  $x_1, x'_1, x''_1, x'''_1, \dots$ , des différents échantillons comme des valeurs observées d'une même variable aléatoire  $x_1$ , la suite des deuxième observations  $x_2, x'_2, x''_2, x'''_2, \dots$ , des différents échantillons comme des valeurs observées d'une variable aléatoire  $x_2$ .

Donc les moyennes observées sont elles-même des valeurs d'une variable aléatoire  $\bar{x}$ , qui est fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , de telle sorte que :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

c'est la distribution d'échantillonnage de la moyenne.

On peut facilement déterminer la moyenne  $m$  et la variance  $\delta^2$  de cette distribution

- La moyenne

$$E(\bar{X}) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i),$$

ou :

$$E(\bar{X}) = m.$$

- La variance

$$\delta^2 \bar{X} = \text{var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{\delta^2}{n}.$$

- L'écart-type

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

**Exemple 1.3.1** *Jet de deux dés supposés parfaitement homogènes : le résultat  $X_1$ , donné par le premier dé, et le résultat  $X_2$ , donné par le deuxième dé, soit deux variables aléatoires indépendantes susceptibles de prendre les valeurs :*

$$x_1 = 1, 2, \dots, 6 \quad \text{et} \quad x_2 = 1, 2, \dots, 6,$$

*la moyenne des deux résultats :*

$$\bar{X} = (X_1 + X_2) / 2,$$

*est elle-même une variable aléatoire, qui peut prendre les valeurs :*

$$\bar{x} = 1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 6,$$

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$P(\bar{x})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

*on peut vérifier que la moyenne, la variance, l'écart-type de cette distribution d'échantillonnage sont bien :*

$$m_{\bar{x}} = \frac{7}{2},$$

et

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{35}{12}\right) / 2 = \frac{35}{24} \simeq 1.46,$$

$$\delta_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{35}{24}} \simeq 1.21.$$

### 1.3.2 La distribution d'échantillonnage de la variance

Supposons que dans une population infinie, on ait prélevé au hasard des échantillons de  $n$  observations

la variance correspondante est :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$s'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2,$$

$$s''^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x''_i - \bar{x}'')^2, \dots,$$

et ces variances peuvent être considérées comme des valeurs observées d'une variable aléatoire :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

c'est la distribution d'échantillonnage de la variance.

En vertu des propriétés de l'espérance mathématique, et de la définition-même de la variance, la moyenne de cette distribution est pour tout échantillon aléatoire et simple :

$$\begin{aligned} E(s^2) &= E\left[\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (\bar{X} - m)^2\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - m)^2 - E(\bar{X} - m)^2 = \delta^2 - \frac{\delta^2}{n}, \end{aligned}$$

ou encore :

$$E(s^2) = (n - 1) \delta^2 / n.$$

La variance de la distribution d'échantillonnage de la variance dans le cas d'une population-

parent normale est donnée par

$$\text{var}(s^2) = E [s^2 - (n-1)\delta^2/n]^2 = 2(n-1)\delta^4/n^2.$$

### 1.3.3 La distribution d'échantillonnage de la médiane

La médiane  $\tilde{X}$  d'un échantillon est une variable aléatoire, d'une façon générale, pour les populations parents dont la distribution est continue on a :

$$E(\tilde{X}) = \tilde{m},$$

telle que :  $\tilde{m}$  la médiane de la population.

Pour des effectifs suffisamment grands, la variance correspondante est donné de façon approchée par la relation :

$$\text{Var}(\tilde{X}) \simeq 1/[4nf^2(\tilde{m})],$$

$f(\tilde{m})$  : étant la valeur de la fonction de densité de population.

En particulier, pour une population normale, on en déduit :

$$\text{Var}(\tilde{X}) \simeq \pi\delta^2/(2n).$$

La variance de la médiane est toujours supérieure à la variance de la moyenne, sauf dans le cas d'échantillons de deux individus ( $n = 2$ ), pour lesquels la moyenne et la médiane sont confondues à la limite, quand  $n$  tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\text{Var}(\tilde{X})/\text{Var}(\bar{X}) \rightarrow [\pi\delta^2/(2n)]/(\delta^2/n) = \pi/2.$$

# Chapitre 2

## Lois de probabilités

### 2.1 Variables aléatoires discrètes

**Définition 2.1.1** *L'univers  $\Omega$ , constitué d'un nombre fini ou dénombrable d'éléments.*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n, \dots\}.$$

*Définie une variable aléatoire  $X$  consiste à associer à chaque élément  $\omega$  de  $\Omega$  un nombre réel  $x$  :*

$$\begin{aligned}\Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) = x.\end{aligned}$$

La loi de probabilité discrète est définie par les couples  $(x_i, p_i)$ .

Avec

$$P(X = x_i) = p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{x_i < x} p_i = 1.$$

Et la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

On définit l'espérance et la variance mathématique de  $X$  par :

$$E(X) = \mu = \sum_{i=0}^n x_i p_i \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = E[(X - \mu)]^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

## 2.1.1 Lois de probabilités de variables aléatoires discrètes

### La loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli est la loi d'une variable aléatoire discrète qui prend deux valeurs 1 et 0, la première avec une probabilité  $p$  et la seconde avec une probabilité  $1 - p$ . On note cette loi  $B(p)$  où le nombre réel  $p$  est le paramètre de la loi, et on écrit :

$$X \sim B(p) \iff P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Avec

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = (1 - p)p.$$

### La loi binomiale

La loi binomiale de paramètre  $n$  (entier) et  $p$  (nombre réel dans,  $[0, 1]$ ) notée  $B(n, p)$  est la somme de  $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli et on a :

$$\forall k \in [0, n], P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k},$$

où  $n$  est la répétition indépendante d'une expérience de Bernoulli et  $C_n^k$  est le coefficient binomial donné par :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On peut vérifier que

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

### La loi géométrique

La loi géométrique de paramètre  $p$  notée  $G(p)$  est la loi d'une variable aléatoire discrète  $X$  prend la valeur  $x \geq 1$  tel que ( $x$  le nombre d'essais pour obtenir un succès). Cette loi est généralement utilisée lorsque nous nous intéressons au temps d'attente du 1<sup>ier</sup> succès dans une expérience de Bernoulli et on a

$$\forall x \in [1, +\infty[; P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad \text{et on écrit } X \sim G(p).$$

De plus

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

### La loi de Poisson

La loi de poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  notée  $X \sim P(\lambda)$  est la loi d'une variable aléatoire discrète  $X$  qui prend des valeurs entières positives. On utilise cette loi pour représenter le nombre totale d'évènement dans un phénomène par exemple le nombre d'individu blessé dans un accident. Et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*,$$

Avec

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

### La loi Uniforme

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme discrète sur  $[1, n]$  si :

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, x \leq n, P(X = x) = \frac{1}{n}.$$

Et on note  $X \sim U([1, n])$ .

De plus

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

## 2.2 Variables aléatoires continues

**Définition 2.2.1** On dit que  $X$  est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $f(x)$ , telle que la fonction de répartition  $F_X$  de la variable aléatoire  $X$  admette la représentation intégrale suivante :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

La fonction  $f(x)$  est appelé densité de probabilité de  $X$ .

On définit l'espérance et la variance mathématique de  $X$  par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E((X))^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \right) - E(X)^2.$$

## 2.2.1 Lois de probabilités de variables aléatoires continues

### La loi uniforme

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[a, b]$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a < b$ , on dit que  $X$  suit une loi uniforme continue sur  $[a, b]$ , si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Sa fonction de répartition est égale à :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > b \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \end{cases}.$$

Avec

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

### La loi normale

La loi de probabilité la plus utilisée en statistique est la loi normale, encore appelé loi de Gauss ou de Laplace-Gauss cette loi joue un rôle fondamental en probabilité et en statistique mathématique.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  a valeurs dans  $\mathbb{R}$  suit une loi normale de paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ , notée  $N(\mu, \sigma)$ , si sa densité de probabilité  $F_{\mu, \sigma}$  est telle que :

$$F_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Où

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

### La loi exponentielle

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), notée  $\varepsilon(\lambda)$ . Si sa densité de probabilité  $f$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases},$$

sa fonction de répartition égale à :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{(-\lambda x)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

avec

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### La loi gamma

La loi exponentielle est un cas particulier d'une famille de loi appelé loi gamma.

Précisément, si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre,  $\lambda X$  est une variable aléatoire suivant la loi gamma.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$  suit une loi de gamma de paramètres  $r$  et  $\lambda$  ( $r > 0, \lambda > 0$ ), notée  $\Gamma(r, \lambda)$  si sa densité de probabilité la est donné par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{(-\lambda t)} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases},$$

on  $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{(-t)} dt$  est la fonction gamma d'Euler, on a :

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

### La loi bêta

C'est la loi d'une variable aléatoire  $X$ ;  $0 \leq X \leq 1$ , notée  $B(n, p)$  et dépendant de deux paramètres  $n$  et  $p$  et dont la densité est

$$f(x) = \frac{1}{B(n, p)} x^{n-1} (1-x)^{p-1} \quad \text{pour } n, p > 0.$$

Où

$$B(n, p) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)},$$

telle que :

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1).$$

Et on a :

$$E(X) = \frac{n}{n+p} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{np}{(n+p+1)(n+p)^2}.$$

## La loi du Khi-deux

On considère  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes suivant toutes la loi normale  $N(0, 1)$ . La variable aléatoire

$$U = \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

suit une loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté, notée  $\chi_n^2$ , de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

En utilisant le fait que  $\chi^2 = \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$  et les propriétés de la fonction gamma données ci-dessus on montre que :

$$E(X) = n \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = 2n.$$

## La loi de student

Soit  $U$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi  $N(0, 1)$  est une loi  $\chi_n^2$ , On appelle loi de Student à  $n$  degrés de liberté la loi suivie par le rapport

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{n}}},$$

Cette loi est notée  $T_n$  de densité de probabilité donnée par :

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

En se basant sur quelques propriétés de la fonction bêta on montre que :

$$E(T_n) = 0 \quad \text{et} \quad v(T_n) = \frac{n}{(n-2)} \quad \text{si } n \geq 3.$$

Dans le cas où  $n = 1$  on obtient une loi de Cauchy standard.

# Chapitre 3

## Estimation paramétrique

### 3.1 Estimation ponctuelle et estimateurs

#### 3.1.1 Estimateur et estimation

**Définition 3.1.1** Si  $(X_1, \dots, X_n)$  est un échantillon aléatoire d'effectif  $n$  de loi parente la loi de  $X$ , prélevé dans une population  $U$  alors nous appelons estimateur de  $\theta$  toute fonction  $h_n$  de l'échantillon aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$ , noté  $\hat{\theta}_n$ :

$$\hat{\theta}_n = h_n(X_1, \dots, X_n).$$

**Définition 3.1.2** Une fois l'échantillon prélevé, nous disposons de  $n$  valeurs observées  $x_1, \dots, x_n$ , ce qui nous fournit une valeur  $h_n(x_1, \dots, x_n)$  qui est une réalisation de  $\hat{\theta}_n$  et que nous appelons estimation.

#### 3.1.2 Propriétés d'un estimateur

Le choix d'un estimateur va reposer sur ses qualités.

**Définition 3.1.3** Le biais de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  se définit par

$$B(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n) - \theta.$$

**Définition 3.1.4**  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur sans biais (ou non biaisé) du paramètre  $\theta$  si

$$B(\hat{\theta}_n) = 0.$$

C'est-à-dire si

$$E(\hat{\theta}_n) = \theta.$$

**Définition 3.1.5** D'une façon générale, si l'estimateur est sans biais cette précision se mesure par la variance de cet estimateur plus la variance de la précision est bonne. Nous disons qu'un estimateur est efficace s'il a la plus petite variance parmi tous les estimateurs sans biais.

**Définition 3.1.6** Si un estimateur  $\hat{\theta}_n$  est sans biais et que sa variance tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, alors cet estimateur est convergent c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0.$$

**Proposition 3.1.7** Un estimateur sera d'autant meilleur qu'il sera non biaisé, convergent et efficace.

**Définition 3.1.8** Si  $\hat{\theta}_n$  un estimateur de  $\theta$ , nous mesurons la précision de  $\hat{\theta}_n$  par l'écart quadratique moyen, noté EQM :

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_n) = E\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right).$$

**Remarque 3.1.9** Si  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur sans biais, c'est-à-dire si

$$B(\hat{\theta}_n) = 0.$$

Alors :

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_n) = \text{Var}(\hat{\theta}_n).$$

**Théorème 3.1.10** Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur du paramètre  $\theta$  à étudier.

On a

$$E\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right) = \text{Var}(\hat{\theta}_n) + \left[E(\hat{\theta}_n) - \theta\right]^2.$$

**Preuve.** 
$$\begin{aligned} E\left(\left[\hat{\theta}_n - \theta\right]^2\right) &= E\left(\left[\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n) + E(\hat{\theta}_n) - \theta\right]^2\right) \\ &= E\left(\left[\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right]^2\right) + E\left(\left[E(\hat{\theta}_n) - \theta\right]^2\right) + 2E\left(\left[\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right]\left[E(\hat{\theta}_n) - \theta\right]\right) \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}_n) + \left[E(\hat{\theta}_n) - \theta\right]^2. \end{aligned}$$

Car

$$E\left(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right) = 0.$$

■

### 3.1.3 Exemples d'estimateurs de caractéristiques de position et de dispersion

#### Estimateur de l'espérance

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon aléatoire de loi parente la loi de  $X$ , d'espérance  $\mu$  et de variance  $\delta^2$ .

**Définition 3.1.11** *L'estimateur  $\hat{\mu}_n$  de  $\mu$  est égal à :*

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

**Proposition 3.1.12**  *$\hat{\mu}_n$  est un estimateur sans biais de  $\mu$ , c'est-à-dire*

$$E(\hat{\mu}_n) = \mu.$$

*De plus, la variance de  $\hat{\mu}_n$  est égal à :*

$$\text{Var}(\hat{\mu}_n) = \delta^2/n.$$

#### Estimateur de la variance

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon aléatoire de loi parente la loi de  $X$ , d'espérance  $\mu$  et de variance  $\delta^2$ .

**Définition 3.1.13** *L'estimateur  $S_n^2$  de  $\delta^2$  est égal à :*

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2.$$

#### Estimateur de la proportion

Dans le cas de l'estimateur d'une proportion, les variables  $X_i$  prennent les valeurs 0 ou 1.

**Définition 3.1.14** *L'estimateur, noté  $\hat{\pi}_{A,n}$ , de la proportion  $\pi_A$  est égal à :*

$$\hat{\pi}_{A,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu}_n.$$

**Proposition 3.1.15**  $\widehat{\pi}_{A,n}$  est un estimateur sans biais de la proportion  $\pi_A$  c'est-à-dire :

$$E(\widehat{\pi}_{A,n}) = \pi_A.$$

### 3.1.4 Méthode des moments

Supposons que nous devons estimer  $I$  paramètres notés  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_I$ . La méthode des moments consiste à choisir des estimateurs  $\widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_I$  issus de la résolution d'un système de  $I$  équation en les  $I$  paramètres inconnus, obtenu en égalant les  $I$  premiers moments par rapport à l'origine notés  $\mu_i = E(X^i)$ , pour  $i$  variant de 1 à  $I$  et les moments correspondants de l'échantillon

$$m_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^i,$$

pour  $i$  variant de 1 à  $I$ .

**Exemple 3.1.16** Dans le cas où un seul paramètre est inconnu, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\mu_1 = \mu = E(X) = m_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^1 = \bar{x}_n,$$

où  $\mu$  est la moyenne de la population. Si  $\mu$  est le paramètre inconnu, la solution de l'équation ci-dessus est triviale.

$$\widehat{\mu} = m_1 = \bar{x}_n.$$

### Application

**Loi Bêta :** Considérons le modèle paramètre  $P = \{\text{Bêta}(a, b); a \geq 0, b \geq 0\}$ . Nous désirons estimer  $\theta = (a, b)$ . Bêta( $a, b$ ) est de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{[0;1]}(x).$$

Soit  $X_1$  de loi Bêta( $a, b$ ), nous avons :

$$E_{(a,b)}(X_1) = \frac{a}{a+b} := c \quad \text{et} \quad E_{(a,b)}(X_1(1-X_1)) = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} := d.$$

En inversant le système, nous obtenons :

$$a = \frac{cd}{c-d-c^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{(1-c)d}{c-d-c^2}.$$

A l'aide de la loi forte des grands nombres, nous construisons des estimateurs de  $c$  et  $d$  :

$$\widehat{c}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \widehat{d}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i (1 - X_i).$$

Nous déduisons de la méthode de substitution que :

$$\widehat{a}_n = \frac{\widehat{c}_n \widehat{d}_n}{\widehat{c}_n - \widehat{d}_n - \widehat{c}_n^2} \quad \text{et} \quad \widehat{b}_n = \frac{(1 - \widehat{c}_n) \widehat{d}_n}{\widehat{c}_n - \widehat{d}_n - \widehat{c}_n^2},$$

sont des estimateurs convergents de  $a$  et  $b$ .

**Loi uniforme :** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de loi  $U[a; b]$ . Nous avons :

$$E_{(a,b)}(X_1) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad E_{(a,b)}(X_1^2) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3},$$

d'où

$$\frac{\widetilde{a} + \widetilde{b}}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n \quad \text{et} \quad \frac{\widetilde{a}^2 + \widetilde{b}^2 + \widetilde{a}\widetilde{b}}{3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= \overline{X}_n - \sqrt{\frac{3}{n} \sum (X_i - \overline{X}_n)^2}, \\ \widetilde{b} &= \overline{X}_n + \sqrt{\frac{3}{n} \sum (X_i - \overline{X}_n)^2}. \end{aligned}$$

### 3.1.5 Méthode du maximum de vraisemblance

#### Vraisemblance d'un échantillon

La vraisemblance des observations  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$  d'un échantillon aléatoire de loi parente la loi de  $X$  est définie de la façon suivante :

- Si  $X$  est une variable aléatoire continue :

$$\theta \in \Theta \xrightarrow{f} L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i, \theta),$$

où  $\Theta$  est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre  $\theta$  et  $f_X$  la densité de probabilité de  $X$ ;

$$f_x(x_i, \theta) = f_\theta(x_i),$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète :

$$\theta \in \Theta \xrightarrow{f} L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i, \theta),$$

où  $\Theta$  est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre  $\theta$  et  $f_x$  est la fonction de probabilité ponctuelle  $P$  de  $X$  ;

$$f_x(x_i, \theta) = P_\theta = (X_i = x_i).$$

**Remarque 3.1.17** *les expressions de vraisemblance ci-dessus ne sont valables que parce que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes par définition d'un échantillon aléatoire.*

### Estimateur du maximum de vraisemblance

**Définition 3.1.18** *Un estimateur du maximum de vraisemblance noté (EMV) du paramètre  $\theta$  est une statistique de l'échantillon :*

$$\hat{\theta}_n : D_X^n \longrightarrow \Theta$$

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n),$$

telle que  $\forall \theta \in \Theta, L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_n) \geq L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ .

**Définition 3.1.19** *La méthode consistant à estimer  $\theta$  par la valeur qui maximise  $L$  (vraisemblance) s'appelle méthode du maximum de vraisemblance.*

$$\hat{\theta} = \left\{ \theta / L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta} L(\theta) \right\}.$$

Ceci est un problème d'optimisation. On utilise généralement le fait que si  $L$  est dérivable et si  $L$  admet un maximum global en une valeur, alors la dérivée première s'annule en et que la dérivée seconde est négative. Réciproquement, si la dérivée première s'annule en  $\theta = \hat{\theta}$  et que la dérivée seconde est négative en  $\theta = \hat{\theta}$ , alors  $\hat{\theta}$  est un maximum local (et non global) de  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ . Il est alors nécessaire de vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum global. La vraisemblance étant positive et le logarithme népérien une fonction croissante, il est équivalent et souvent plus simple de maximiser le logarithme népérien de la vraisemblance (le produit se transforme en somme, ce qui est plus simple à dériver).

Ainsi en pratique :

1. La condition nécessaire

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

où

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

permet de trouver la valeur  $\hat{\theta}$ .

2.  $\theta = \hat{\theta}$  est un maximum local si la condition suffisante est remplie au point critique :

$$\frac{\partial^2 L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2}(\hat{\theta}) < 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2}(\hat{\theta}) < 0.$$

## 3.2 Estimation par intervalle de confiance

Lorsque nous procédons à l'estimation de l'une des caractéristiques, notée  $\theta$ , de la population, il est plus pertinent de fournir un intervalle  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  plutôt que de donner simplement une estimation ponctuelle, c'est-à-dire d'écrire uniquement  $\hat{\theta} = c$ .

Un tel intervalle  $]\theta_1; \theta_2[$  s'appelle une estimation par intervalle de confiance du paramètre  $\theta$  ou estimation ensembliste de la caractéristique  $\theta$ .

### 3.2.1 Principe

La méthode sur laquelle repose la construction des intervalles de confiance est la suivante :

- Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur de  $\theta$  dont nous connaissons la loi de probabilité pour chaque valeur de  $\theta$ .

- Étant donné une valeur  $\theta_0$  du paramètre  $\theta$ , nous déterminons un intervalle de probabilité bilatéral de niveau  $(1 - \alpha)$  pour l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  c'est-à-dire deux bornes  $\theta_1^n$  et  $\theta_2^n$  telle que :

$$P\left(\theta_1^n < \hat{\theta}_n < \theta_2^n \mid \theta = \theta_0\right) \geq 1 - \alpha.$$

### 3.2.2 Intervalle de confiance

**Définition 3.2.1** Nous appelons intervalle de confiance de niveau de confiance  $1 - \alpha$  du paramètre  $\theta$  tout intervalle  $]\theta_1; \theta_2[$  tel que :

$$P(]\theta_1; \theta_2[ \ni \theta) = 1 - \alpha,$$

pour  $\alpha \in [0; 1]$  fixé.

### 3.2.3 Intervalles de confiance pour une espérance

#### Espérance d'une loi normal, écart-type $\sigma$ connu

soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un échantillon aléatoire de loi parente la loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .

Le meilleur estimateur de  $\mu$  et  $\widehat{\mu}_n$  suit la loi  $N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$  est

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

**a) Intervalle de la probabilité :** L'intervalle de probabilité pour  $\widehat{\mu}_n$  à  $1 - \alpha$  est égal à :

$$\mu - \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \widehat{\mu}_n < \mu + \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

où  $\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  pour la loi normale centrée-réduire.

**b) Intervalle de confiance :** L'intervalle de confiance pour  $\mu$  à  $1 - \alpha$  est égal à :

$$\widehat{\mu}_n(\text{obs}) - \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \widehat{\mu}_n(\text{obs}) + \mu_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

où  $\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  pour la loi normale centrée-réduire.

**Remarque 3.2.2** Souvent  $1 - \alpha$  sera fixé à 0.95 et par conséquent  $\mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$  sera égale à 1.96.

#### Espérance d'une loi normal, écart-type $\sigma$ inconnu

**a) Théorème de Fisher :** Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n$  variables aléatoires indépendantes de la loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .

$\widehat{\mu}_n$  et  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$  sont deux variables aléatoires indépendantes et  $\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  suit la loi normale  $N(0; 1)$  et  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$  suit la loi du Khi-deux  $x^2(n - 1)$ .

$\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}$  suit de la loi de student  $t(n - 1)$ .

**Remarque 3.2.3**  $S_n^2$  est définie par

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{\mu}_n)^2.$$

**b) Intervalle de la probabilité :** L'intervalle de probabilité pour  $\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}$  à  $1 - \alpha$  est égal à :

$$-t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}} < t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}},$$

où  $t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  pour la loi student  $t(n-1)$ .

**c) Intervalle de confiance :** L'intervalle de confiance pour  $\mu$  à  $1 - \alpha$  est égal à :

$$\widehat{\mu}_n(obs) - t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n(obs)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \widehat{\mu}_n(obs) + t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n(obs)}{\sqrt{n-1}},$$

où  $t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  pour la loi student  $t(n-1)$ .

### 3.2.4 Intervalles de confiance pour une variance

**Variance d'une loi normale, espérance  $\mu$  connu**

$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$  est un estimateur de la variance  $\sigma^2$  et  $\frac{n\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$  suit la loi du Khi-deux à  $n$  degrés de liberté, notée  $X^2(n)$ .

**a) Intervalle de probabilité :**  $k_1, k_2$  sont les bornes de l'intervalle de probabilité pour  $\frac{n\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$  si :

$$P \left\{ k_1 < \frac{n\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} < k_2 \right\} = 1 - \alpha.$$

Par exemple, nous pouvons prendre la borne  $k_1$  égale au quantile d'ordre  $\frac{\alpha}{2}$  pour la loi du Khi-deux à  $n$  degrés de liberté  $X^2(n)$  et la borne  $k_2$  égale au quantile d'ordre  $\frac{1-\alpha}{2}$  pour la loi du Khi-deux à  $n$  degrés de liberté  $X^2(n)$ .

**b) Intervalle de confiance :** L'intervalle de confiance pour  $\sigma^2$  à  $1 - \alpha$  est égal à :

$$\frac{n\widehat{\sigma}_n^2(obs)}{k_2} < \sigma^2 < \frac{n\widehat{\sigma}_n^2(obs)}{k_1}.$$

Par exemple, nous pouvons prendre la borne  $k_1$  égale au quantile d'ordre  $\frac{\alpha}{2}$  pour la loi du Khi-deux à  $n$  degrés de liberté  $X^2(n)$  et la borne  $k_2$  égale au quantile d'ordre  $\frac{1-\alpha}{2}$  pour la loi du Khi-deux à  $n$  degrés de liberté  $X^2(n)$ .

**Variance d'une loi normale, espérance  $\mu$  inconnu**

$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \widehat{\mu}_n)^2$  est un estimateur de  $\sigma^2$  et  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$  suit la loi du Khi-deux à  $(n-1)$  degrés de liberté  $X^2(n)$ .

**Remarque 3.2.4 Remarque 3.2.5**  $\widehat{\mu}_n$  est définie par

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

**a) Intervalle de probabilité :**  $l_1, l_2$  sont les bornes de l'intervalle de probabilité pour  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$  si :

$$P \left\{ l_1 < \frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_{n,c}^2}{\sigma^2} < l_2 \right\} = 1 - \alpha.$$

Par exemple, nous pouvons prendre la borne  $l_1$  égale au quantile d'ordre  $\frac{\alpha}{2}$  pour la loi du Khi-deux à  $(n-1)$  degrés de liberté  $X^2(n-1)$  et la borne  $l_2$  égale au quantile d'ordre  $\frac{1-\alpha}{2}$  pour la loi du Khi-deux à  $(n-1)$  degrés de liberté  $X^2(n-1)$ .

**b) Intervalle de confiance :** L'intervalle de confiance pour  $\sigma^2$  à  $1 - \alpha$  est égal à :

$$\frac{(n-1)S_{n,c}^2(obs)}{l_2} = \frac{nS_n^2(obs)}{l_2} < \sigma^2 < \frac{nS_n^2(obs)}{l_1} = \frac{(n-1)S_{n,c}^2(obs)}{l_1}.$$

# Bibliographie

- [1] F. Bertrand, M. Maumy-Bertrand, Statistique pour les scientifiques, Dunod, paris, 2011.
- [2] Pierre Dagnelie, Statistique théorique et appliquée, Statistique descriptive et bases de l'inférence statistique, 2eme édition, Groupe De Boeck s.a, 2007.
- [3] Bernard Delyon, estimation paramétrique, Université Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cédex, France.
- [4] F. Bertrand, M. Maumy-Bertrand, Initiation à la Statistique , Dunod, paris, 2011.
- [5] Philippe Ciblat, Rappel sur la théorie de l'estimation, école Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France2011.
- [6] A.A.Borovkov. mathematical statistics. Gordon and Breach. science, publishers, Amsterdam, 1998.
- [7] [Http ://fr.wikipedia.org/wiki/Statistique\\_inférentielle](http://fr.wikipedia.org/wiki/Statistique_inférentielle).
- [8] [Http ://www.odilejacob.fr/catalogue/sciences/mathematiques/estimation](http://www.odilejacob.fr/catalogue/sciences/mathematiques/estimation).