

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de
Licence
En: Filière mathématiques fondamentales**

Theoreme de Baire

Préparé par :

Meskine Hayat
Belkamel Roukia
Aliout Amina

Encadrer par : Boudjerida Nadjet

Année universitaire:2014/2015



REMERCIEMENTS

Nous remercions Allah, le tout puissant de m'avoir donné, la santé, la volonté et la patience pour l'accomplissement de cette mémoire

Nos remerciements en deuxième temps, à toutes nos familles qui nous soutient dans les moments de pénibles comme dans les moments de joie.

Également, nous remercions M^m Boudjerida nadjet qui encadre ce mémoire et nous dirigeons et nous encourageons tout le long du travail.

Un grand remerciement à mes enseignants au département des sciences et technologie surtout, les enseignants des mathématique et informatique et tous les membres du département des sciences et technologie du centre universitaire de Mila.

Enfin, nous exprimons nos plus remerciements à toute personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Notions et resultats préliminaires	4
1.1 Distance et espace métrique	4
1.2 Boules ouverts et boules fermés	6
1.3 Ensembles ouverts et Ensembles fermés	7
1.4 Ensembles bornées, diamètre	8
1.5 Intérieur, adhérence et densité	9
1.6 Suite de Cauchy et espace métrique complet	11
1.6.1 Suite de Cauchy	11
1.6.2 Espace métrique complet	13
1.7 Espace vectoriel normé	14
1.7.1 Espace vectoriel	14
1.7.2 Espaces vectoriels normés	15
1.8 Espace de Banach	16
1.9 Applications linéaires continues	17
1.9.1 Applications continues	18
1.9.2 Applications linéaires continues	19
2 Théorème de Baire et applications	20
2.1 Théorème de fermés emboîtes	20
2.2 Théorème de Baire	21
2.3 Quelques applications de théorème de Baire	24
2.3.1 Application au fonction continue	24
2.3.2 Application aux espaces de Banach	27
Bibliographie	29

Notations :

\mathbb{Q} : corps des nombres rationnels.

\mathbb{R} : corps des nombres réels ou $]-\infty, +\infty[$

\mathbb{R}_+ : $[0, +\infty[$.

\mathbb{R}^* : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

\mathbb{R}_+^* : $]0, +\infty[$.

C_E^A : complémentaire de A sur E .

\mathbb{R}^n : L'ensemble des n tuple ordonnés (x_1, x_2, \dots, x_n) tel que $x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}$

\mathbb{k} : corps des nombres réels ou corps des nombres complexes.

$\langle u, v \rangle$: produit scalaire des vecteurs u et v .

$d(A, B)$: distance des points A et B .

$S(A, r)$: sphère de centre A et de rayon r .

$B(A, r)$: boule d'ouvert de centre A et de rayon r .

$\overline{B(A, r)}$: boule fermée de centre A et de rayon r .

$\rho(A)$: le diamètre de l'ensemble A .

lettres gerèques utilisés :

λ : landa.

ε : epsilon.

Ψ : psi.

ϕ, Φ : phi.

α : alpha.

β : betà

Introduction Générale

René Baire (1874-1932) démontra ce résultat en 1899 bien que l'américain William H. Brouwer l'ait obtenue aussi dès 1898, c'est pourtant le nom du français Baire que lui a attaché la postérité. ce théorème étonnamment simple est un outil puissant en analyse avec une conséquence parfois surprenante.

Dans un espace métrique E , un ouvert u de E est dense dans E si et seulement si le fermé complémentaire u^c est d'intérieur vide si on a un nombre fini d'ouverts denses, on vérifie facilement de proche en proche que $u_1 \cap \dots \cap u_n$ est encore un ouvert dense. le théorème de Baire dans un cas on cette propriété triviale d'intersection finie peut s'étendre au suite d'ouvert dense.

théorème de Baire consacré dans un espace métrique complet. toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E c-à-dire soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouvert dense dans E alors pour toute $n \in \mathbb{N}$, $\overline{u_n} = E$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n = E$.

Dans ce travail, nous présenterons quelques définitions bien connues et les théorèmes importants et très utiles qui sont des théories de Baire dans l'espace métrique et quelques variantes et ses applications.

L'objet du premier chapitre est donner quelques résultats fondamentaux qui concernent les espace métrique et les espace normés qui nous permettent de mieux comprendre le contenu de ce travail.

La deuxième chapitre est consacré à la présentation du théorème et quelques variantes. On commence par définir le théorème de fermé enboité puisque on utilise au démonstration de théorème de Baire.

Enfin nous allons présenter quelques applications du théorème de Baire dans les fonctions continues et l'espace de Banach.

Chapitre 1

Notions et resultats préliminaires

Ce chapitre est consacré aux notions fondamentales de l'espace métrique et normée, ainsi qu'à quelques définitions et propositions qui concerne la distance, les ensembles, suite de Cauchy, espace métrique complet, espace vectoriel normé, espace de Banach et les applications linéaires continus.

1.1 Distance et espace métrique

Définition 1.1.1 (*distance*) : Soit E un ensemble non vide quelconque.

Une distance sur E est une fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie sur le produit cartésien $E \times E$, à valeur dans l'ensemble \mathbb{R}_+ , qui vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2 : d(x, y) = 0 \implies x = y$ (*séparation*)
2. $\forall (x, y) \in E^2 : d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*)
3. $\forall (x, y, z) \in E^3 : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*)

Définition 1.1.2 (*espace métrique*) :

On appelle espace métrique un couple (E, d) constitué par un ensemble non vide et par une distance d sur E , on dit souvent que E est muni de la distance d . un espace métrique sera engénérale noté (E, d) ou bien E_d .

Exemple 1.1.3 : Soit $E = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. On définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
 - d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \\
 - d_\infty(x, y) &= \sup_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i). \\
 - d_0(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

En effet, $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

$$1. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \quad d_1(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$\begin{aligned}
 d_1(x, y) = 0 &\iff \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0 \\
 &\iff |x_i - y_i| = 0 \quad 1 \leq i \leq n \\
 &\iff x_i = y_i \\
 &\iff x = y
 \end{aligned}$$

$$2. \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_1(x, y) = d_1(y, x)$$

$$\begin{aligned}
 d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\
 &= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \\
 &= d_1(y - x)
 \end{aligned}$$

$$3. \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad d_1(x - y) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$$

$$\begin{aligned}
 d_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i + y_i - z_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|
 \end{aligned}$$

$$d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$$

donc d_1 est une distance sur \mathbb{R}^n .

Remarque 1.1.4 :

Sur un même ensemble E on peut définir une infinité de distance.

Définition 1.1.5 (distance équivalent) :

Soient d_1 et d_2 deux distances sur le même ensemble E .

on dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall x, y \in E : \alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y)$$

Proposition 1.1.6 :

Pour tout x, y et z des points d'un espace métrique (E, d) on a :

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) .$$

Preuve.

La condition 3 que vérifie la distance d nous donne :

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

en utilisant la symétrie on obtient :

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$$

de ces deux inéquations on en déduit que :

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) . \blacksquare$$

1.2 Boules ouverts et boules fermés

Définition 1.2.1 : Soit (E, d) un espace métrique,

- On appelle "**boule ouvert**" de centre x et de rayon r l'ensemble de y de E dont la distance à x est strictement inférieure à r ou la note $B(x, r)$ on a donc :

$$B(x, r) = \{y \in E / d(x, y) < r\}$$

- On appelle "**boule fermé**" de center x et de rayon r l'ensemble de $y \in E$ dont la destance à x inférieure ou égale a r ou la note $B(x, r)$ on a donc :

$$B(x, r) = \{y \in E / d(x, y) \leq r\}$$

- On appelle "**sphère**" de centre x et de rayon r et on note $S(x, r)$ tq :

$$S(x, r) = \{x \in E / d(x, y) = r\}$$

Remarque 1.2.2 : Pour $0 < r < r'$ ou a les inclusions suivantes :

$$B(x, r) \subset \overline{B}(x, r) \subset S(x, r') .$$

1.3 Ensembles ouverts et Ensembles fermés

Définition 1.3.1 : Soit (E, d) est un espace métrique, soit $A \subset E$

– **Ensemble ouvert** : on dit que A est un ouvert dans E si :

$$\forall x \in A, \exists r > 0 \text{ tq : } B(x, r) \subset A.$$

– **Ensemble fermé** : on dit que A est un fermée dans E si son complémentaire C_E^A est un ouvert :

$$\forall x \in C_E^A, \exists r > 0 \text{ tq : } B(x, r) \subset C_E^A$$

Théorème 1.3.2 :

Tout boule ouvert de l'espace métrique (E, d) est un ouvert, tout boule fermé de l'espace métrique (E, d) est fermé.

Preuve.

Soit y un point de la boule ouvert $B(x, r)$

on a $d(x, y) < r$ si on pose $\rho = r - d(x, y) > 0$

alors $B(y, \rho) \subset B(x, r)$ pour la voir supposons que $z \in B(y, \rho)$ alors :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \rho = r$$

ce qui montre que :

$z \in B(x, r)$ de meme, si y n'appartient pas à la boule fermé $\overline{B}(x, r)$

on a :

$$\rho = d(x, y) - r > 0, B(y, \rho) \text{ est disjointe de } B(x, r).$$

en effet,

$$\text{considérons } z \in B(y, \rho) \not\subset \overline{B}(x, r) \text{ } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + \rho = d(x, y).$$

ce qui est absurde.

donc $E \setminus \overline{B}(x, r)$ est un ouvert et $\overline{B}(x, r)$ sera alors fermé. ■

Théorème 1.3.3 :

1. \emptyset et E sont des parties ouverts dans E .
2. Tout réunion (quelconque) de parties ouvertes de E est une partie ouvertes dans E .
3. Toute intersection finie de parties ouverts de E est une partie ouverte de E .

Preuve.

1. Il est clair que \emptyset est un ouvert dans E

on a : $\forall x \in E \quad \forall r > 0 \quad B(x, r) \subset E$ danc E est une ouvert de E

2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E

Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I, x \in A_i$

$\exists r_i > 0, B(x, r_i) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

donc : $\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i, \exists r = r_i > 0 \quad B(x, r_i) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

alors : $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouvert de E .

3. soit $(A_i)_{i \in \overline{1, n}}$ une famille d'ouverts de E

soit $x \in \bigcap_{i \in \overline{1, n}} A_i \implies 1 \leq i \leq n, x \in A_i$

$\forall 1 \leq i \leq n, \exists r_i > 0, B(x, r_i) \subset A_i$

soit $r = \min_{1 \leq i \leq n} (r_i)$

donc : $B(x, r) \subset B(x, r_i), \forall i = \overline{1, n}$

$B(x, r) \subset \bigcap_{i \in \overline{1, n}} B(x, r_i) \subset \bigcap_{i \in \overline{1, n}} A_i$

donc :

$\forall x \in \bigcap_{i \in \overline{1, n}} A_i, \exists r = \min_{1 \leq i \leq n} (r_i), B(x, r) \subset \bigcap_{i \in \overline{1, n}} A_i$

alors : $\bigcap_{i \in \overline{1, n}} A_i$ est un ouvert de E .

■

1.4 Ensembles bornées, diamètre

Définition 1.4.1 : Soit (E, d) un espace métrique, soit $A \subset E$ tq $A \neq \emptyset$.

On dit que A est bornée s'il existe une boule $B(x_0, r)$ tq : $A \subset B(x_0, r)$ (boule ouvert ou fermé)

Proposition 1.4.2 :

1. Toute partie d'une partie bornée est bornée.
2. La réunion de deux parties bornées est bornée, et par suite il en est de même pour toute réunion finie.
3. Toute boule est bornée.

4. Pour qu'une partie A est bornée, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans une boule :

- si A est contenue dans une boule, elle est bornée,
- si A est bornée non vide (le cas $A = \emptyset$ est trivial) :
- pour tout $x \in A : A \subset B(x, \rho(A))$;
- mais on peut également choisir le centre $x \in E$ de façon arbitraire :

$$A \subset B(x, \rho(A) + d(x, A))$$

car si :

$$y \in A : d(x, y) \leq \rho(A \cup \{x\}) \leq \rho(A) + d(x, A).$$

Définition 1.4.3 :

On appelle diamètre de A et on note $\rho(A)$ le nombre réel positive :

$$\rho(A) = \sup_{(x,y) \in A \times A} d(x, y)$$

1.5 Intérieur, adhérence et densité

Définition 1.5.1 (Intérieur) :

Soit (E, d) un espace métrique, soit $A \subset E$ tq : $A \neq \emptyset$.

Un point $x \in A$ est dit intérieur à A s'il existe $r > 0$. tq : $B(x, r) \subset A$, l'ensemble de tout les points intérieurs à A s'appelle intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$:

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0 : B(x, r) \subset A.$$

Proposition 1.5.2 :

1. $\overset{\circ}{E} = E$;
2. $\overset{\circ}{A} \subset A$;
3. $\left(\overset{\circ}{A \cap B} \right) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Définition 1.5.3 (Adhérence) : Soit (E, d) un espace métrique, soit $A \subset E$.

Un point $x \in E$ est dit adhérent à A si toute boule centrée en x a une intersection non vide avec A .

L'ensemble de tous les points de E qui sont adhérents à A est appelé l'adhérence de A , on le note $\text{adh}(A)$ ou bien A surmonté d'une barre \bar{A} .

$$\bar{A} = \{x \in E, d(x, A) = 0\}$$

$$x \in \bar{A} \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Proposition 1.5.4 :

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \bar{A}$;
3. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$;
4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
5. $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$;
6. A fermé $\iff A = \bar{A}$.

Définition 1.5.5 (Densité) : Soit (E, d) un espace métrique, soit A et $B \subset E$

- On dit que A est dense dans B si $B = \bar{A}$.
- On dit que A est dense dans E si $E = \bar{A}$.

Exemple 1.5.6 :

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ alors \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

1.6 Suite de Cauchy et espace métrique complet

1.6.1 Suite de Cauchy

Soit (E, d) un espace métrique, si $(u_n) \subset (E, d)$ est une suite, on notera une suite extraite de cette suite par $(u_{\varphi(x)})_{n \in \mathbb{N}} \subset (E, d)$.

Définition 1.6.1 (*suite convergente*) :

Soit (E, d) un espace métrique, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de point de E et $u \in E$. on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u si on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon$$

si $\exists u \in E$ telque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

on dit que la suite (u_n) est convergente.

Proposition 1.6.2 :

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans un espace métrique (E, d) alors la limite est unique.

Preuve.

Supposons que (u_n) est convergente vers u et convergente vers v dans E alors :

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} n \geq n_0 \implies d(u_n, u) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} n \geq n_1 \implies d(u_n, v) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

soit $\varepsilon > 0$ on choisit n tq :

$$n \geq \max(n_0, n_1)$$

$$\begin{aligned} d(u, v) &\leq d(u, u_n) + d(u_n, v) \\ &\leq d(u_n, u) + d(u_n, v) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{alors : } \forall \varepsilon > 0, d(u, v) \leq \varepsilon \implies d(u, v) = 0$$

$$\iff u = v \quad \blacksquare$$

Remarque 1.6.3 :

Tout suite extraite d'une suite convergente est convergente avec la même limite.

Définition 1.6.4 (*suite de Cauchy*) :

Dans un espace métrique (E, d) , on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsqu'elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall p, q \in \mathbb{N} p, q \geq n \implies d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

Proposition 1.6.5 :

Tout suite convergente dans (E, d) est une suite de Cauchy.

Preuve.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tq :

$$\lim u_n = u \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall p > q \geq n_1 \Rightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon?$$

Si $n_1 = n_0$

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : \forall p > q \geq n_0 \implies p > n_0 \implies d(u_p, u) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$q \geq n_0 \implies d(u_q, u) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(u_p, u_q) \leq d(u_p, u) + d(u, u_q)$$

$$\leq d(u_p, u) + d(u_q, u)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 = n_0 \quad \forall p > q > n_0 : d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

Remarque 1.6.6 : L'invers de cette proposition est faux.

Proposition 1.6.7 :

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace métrique (E, d) si on peut extraire une suite convergente (u_n) de (u_{n_k}) alors (u_n) converge vers la meme limite c'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

- Soit (u_n) une suite de Cauchy dans (E, d) si on peut extraire une suite convergent de (u_n) alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la meme limite.

Proposition 1.6.8 :

Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$ alors on a :

$$1. \forall u \in \bar{A} \iff \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

$$2. A \text{ est fermé } \iff A \text{ contenant limite de tous les suites convergents.}$$

1.6.2 Espace métrique complet

Définition 1.6.9 :

Un espace métrique sur le quel les suites de Cauchy sont convergentes sera appelé "**espace complet**".

Exemple 1.6.10 :

$(\mathbb{N}, |.|)$ est un espace complet.

Proposition 1.6.11 :

Soient E un espace et d_1, d_2 deux distances équivalents sur E .

Alors si (E, d_1) est complet, il est le même de (E, d_2) de plus toute suite de Cauchy convergente pour l'un est convergente pour l'autre.

Définition 1.6.12 :

On dira d'une partie A de F qu'elle est un sous espace complet de E si elle est complète pour la métrique induite de E .

Proposition 1.6.13 :

- Tout sous ensemble fermé d'un espace complet est complet.
- Tous sous espace complet d'un espace métrique est fermé.
- Tout produit finie d'espace métrique (E, d) ou $i \in I$ complet est complet pour la métrique produit (si $x = (x_i)$ et $y = (y_i)_{i \in I}$) $d(x, y) = \sup d(x_i, y_i)$.

1.7 Espace vectoriel normé

1.7.1 Espace vectoriel

Définition 1.7.1 (espace vectoriel) :

Sur un corps \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est un ensemble E muni de deux lois $(+, \cdot)$; la loi $(+)$ étant une application de $E \times E$ vers E , la loi (\cdot) multiplication par un scalaire étant une application $\mathbb{k} \times E$ vers E telle que :

1. $(E, +)$ est groupe commutatif
2. $\forall \alpha \in \mathbb{k} \forall x, y \in E : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \forall x, y \in E : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y.$
4. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \forall x \in E : (\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta \cdot x).$
5. $\forall x \in E : 1_{\mathbb{k}} \cdot x = x.$

les elements de \mathbb{k} (respectivement E) sont appelle scalaire, le triple $(E, +, L)$ s'appelle un espace vectoriels sur la corps \mathbb{k} .

Définition 1.7.2 :

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne $(+)$, $(E, +)$ est un groupe commutatif si et sulement si :

1. $\forall x, y \in E : x + y = y + x.$
2. $\forall x, y, z \in E : (x + y) + z = x + (y + z).$
3. $\exists e \in E, \forall x \in E : x + e = e + x = x.$
4. $\forall x \in E, \exists x' \in E : x' + x = x + x' = e.$

Remarque 1.7.3 :

L'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ muni des opération habituelle d'addition de vecteur et de produit d'un vecteurs par un scalaire est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Théorème 1.7.4 :

Soit E un espace vectoriel, $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ alors on a :

1. $0 \cdot u = 0.$
2. $\lambda \cdot 0 = 0.$
3. $(-1) \cdot u = -u.$
4. si : $\lambda \cdot u = 0$ alors $\lambda = 0$ ou $u = 0.$

Définition 1.7.5 : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} et F une partie de E on dit que F est un sous espace vectoriel de E si :

1. $F \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in F : (x + y) \in F$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{k}$ et $\forall x \in F : (\alpha x) \in F$.

Définition 1.7.6 :

On dit que un espace vectoriel E est de dimension finie, s'il est engendré par une famille de vecteur, i . e il existe un nombre fini de vecteur $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ linéairement indépendant de E telle que :

$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k} :$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

Définition 1.7.7 :

Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel et soient E_1, E_2 deux sous-espace vectoriel de E on dit que E est une somme direct de E_1 et E_2 on note : $E = E_1 \oplus E_2$ si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

1.7.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.7.8 :

Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel, on appelle norme sur E une application de E dans \mathbb{R}_+ , habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (homogénéité)
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Exemple 1.7.9 :

Sur \mathbb{R}^n on définit les applications suivantes :

1. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
 2. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
 3. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
- définissent des normes équivalentes.

Définition 1.7.10 :

On appelle *espace vectoriel norme* le couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Exemple 1.7.11 :

L'espace des nombres réels \mathbb{R} muni de la valeur absolue $x \mapsto |x|$ est un espace vectoriel norme et appelée *norme usuelle de \mathbb{R}* .

Définition 1.7.12 : Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur \mathbb{k} -espace vectoriel E .

On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* et écrit $\|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2$ si et seulement s'il existe deux constantes strictement positives a et b telle que pour tout $x \in E$ on ait :

$$a \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b \|\cdot\|_1$$

Théorème 1.7.13 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie alors toutes normes sur E sont équivalentes.

1.8 Espace de Banach

Définition 1.8.1 :

On appelle *espace de Banach* un \mathbb{k} -espace vectoriel normé complet.

Exemple 1.8.2 :

\mathbb{R} usuel est un espace de Banach.

Proposition 1.8.3 :

Un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach.

1.9 Applications linéaires continues

Dans cette partie nous intéressons à l'espace des fonctions linéaires, nous allons à norme cet espace puis à la caractériser.

Soient E, F deux ensembles non vide.

Définition 1.9.1 :

Une application définie sur E et à valeurs dans F est une loi qui à tout élément de E fait correspondre un unique élément de F , si on note f cette application, l'élément associé à x par f est noté $f(x)$.

L'ensemble E s'appelle ensemble de départ.

L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée de f .

On note suivant une fonction $f : E \longrightarrow F$ ou $x \longrightarrow f(x)$.

l'élément $y = f(x)$ s'appelle l'image de x par f et x s'appelle antécédent de y par f .

Définition 1.9.2 :

- Une application $f : E \longrightarrow F$ est **injective** si :

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- Une application $f : E \longrightarrow F$ est **surjective** si :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E : f(x) = y.$$

- Une application $f : E \longrightarrow F$ est **bijjective** si :

$$f \text{ est injective et surjective} \iff \forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x).$$

Définition 1.9.3 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application $A \subset E$ et $B \subset F$ deux ensemble non vide.

- On appelle **image direct** de A par f notée $f(A)$ et définie par :

$$f(A) = \{y \in B, \exists x \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \in B ; x \in A\} \subset F.$$

- On appelle **image réciproque** de B par f notée $f^{-1}(B)$ et définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in A, \exists y \in B : f(x) = y\} = \{x \in A, f(x) \in B\} \subset E$$

- On appelle **noyau** de f , note $\text{Ker}(f)$ le sous ensemble particulier de E tel que :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in A, f(x) = 0\}$$

1.9.1 Applications continues

Définition 1.9.4 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espace vectoriel normés sur le meme corps \mathbb{k} et $A \subset E$ ensemble non vide, et a un point de E .

soit $f : E \rightarrow F$ une application mathématiquement, on dit que f continue au point $a \in A$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in A, \|x - a\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.9.5 :

L'application f est continue sur E s'elle est continue en tout point de E .

Théorème 1.9.6 :

L'application f est continue au point a de E si est seulement si pour si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élément de E qui converge vers a dans $(E, \|\cdot\|_E)$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(a)$.

Proposition 1.9.7 :

Soit $f : E \rightarrow F$ un application, alors f est continue sur E si et seulement si l' image réciproque de tout fermé de F est fermé de E .

Définition 1.9.8 : Soit $f : E \rightarrow F$

On dit que f est **uniformément continue** sur E si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in E^2, \|x - y\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon \leq \|x - y\|.$$

Remarque 1.9.9 :

Tout application uniformément continue est continue sur E . L'inverse est faux en général.

1.9.2 Applications linéaires continues

Dans cette partie nous intéressons à l'espace des fonctions linéaires continues, nous allons à norme cet espace puis à le caractériser.

Définition 1.9.10 : Soient E, F deux \mathbb{k} -espace vectoriel sur le même corps \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) une **application linéaire** si et seulement si :

1. $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Proposition 1.9.11 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **linéaire** alors les propriétés suivantes équivalentes :

- f continue sur E .
- f continue sur O_E .
- f est bornée sur $\overline{B}(0, 1)$.
- f est bornée sur $S(0, 1), \exists C > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq C \|x\|_E$.
- f est lipschitzienne.

Proposition 1.9.12 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application alors : $\ker(f)$ est un ensemble fermé de E .

Théorème 1.9.13 :

L'application f est continue au point a de A , si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \|\cdot\|_E)$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Corollaire 1.9.14 :

On dimension finie, tout les application linéaire sont continue.

Théorème 1.9.15 :

Pour $f \in L_C(E, F)$ on pose :

$$\|f\|_{L_C(E, F)} = \sup_{x \in E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

la fonction $f \in L_C(E, F) \rightarrow \|f\|_{L_C(E, F)}$ est une norme sur l'espace vectoriel $L_C(E, F)$, qui appellée normè naturelle de $L_C(E, F)$, et on a les égalites suivant :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L(E, F)} &= \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F \\ &= \inf \{c \text{ réel } > 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq c \|x\|_E\}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorème de Baire et applications

Ce second chapitre très important nous allons présenter le théorème de Baire et quelque application, il ne contient qu'un seul théorème, mais il est fondamental, c'est le théorème de Baire (pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\overline{u_n} = E$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n = E$).

2.1 Théorème de fermés emboîtes

Définition 2.1.1 :

Soient (E, d) un espace métrique complet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissant de fermés non vides de E tel que le diamètre des u_n tend vers 0 quand n tend vers ∞ , cest à dire :

$$\rho(u_n) = \sup_{(x,y) \in u_n} d(x,y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors il existe $l \in E$ tel que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n = \{l\}$$

Preuve.

Existance :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \emptyset$, donc il existe $x_n \in u_n$

soient $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q < p$ on a :

$$d(x_p, x_q) \leq \rho(u_q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la suite (x_n) ainsi construite est de Cauchy à terme dans E complet, donc il existe $l \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ puis comme :

$\forall m \in \mathbb{N}$, (x_n) est à terme dans u_m à partir d'un certain rang (au pire m), avec u_m fermé

on a $l \in u_m$

donc : $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n$

L'unicité :

soit $k \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n$

$\forall n \in \mathbb{N} (k, l) \in u_n^2 \implies 0 \leq d(k, l) \leq \rho(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\implies d(k, l) = 0 \implies K = l$

D'ou l'unicité. ■

2.2 Théorème de Baire

Définition 2.2.1 :

Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E . Si tous les ouverts u_n sont dense dans E . Alors $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est encore dense dans E , En particulier

on : $\bigcap u_n \neq \emptyset$.

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u_n} = E$$

Preuve.

Il s'agit de montrer que pour si $u \in E$ est un ouvert non vide.

Alors $G \cap u \neq \emptyset$. Fixon un tel ouvert u .

Comme u_0 est un ouvert dense de E l'ensemble $u_0 \cap u$ est un ouvert non vide.

Soit $x_0 \in (u_0 \cap u)$ et choisissons $r_0 \leq 2^{-0}$ tel que :

$\overline{B}(x_0, r_0) \subset (u_0 \cap u)$ Comme u_0 est dense dans E , l'ensemble $u_0 \cap u$ est un ouvert non vide.

Soit $x_0 \in (u_0 \cap u)$ et choisissons $r_0 \leq 2^{-0}$ tel que : $\overline{B}(x_0, r_0) \subset (u_0 \cap u)$.

Comme u_1 est dense dans E , on a $u_1 \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$ on peut donc trouver x_1 et $r_1 \leq 2^{-1}$ tel que :

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset (B(x_0, r_0) \cap u_1) \subset (B(x_0, r_0) \cap u_1 \cap u)$$

Par récurrence :

on voit qu'on peut construire une suite de boules ouvertes $B_n = B(x_n, r_n)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\overline{B}_{n+1} \subset B_n \dots \dots \dots (1)$$

$$r_n \leq 2^{-n} \dots \dots \dots (2)$$

$$\overline{B}_n \subset (u_n \cap u) \dots \dots \dots (3)$$

D'après (1) et (2) et le théorème des fermés enboités, on a alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n \neq \emptyset$. D'après (3)

on déduit $G \cap u \neq \emptyset$. ■

Remarque 2.2.2 :

On dit que un espace métrique E est un **espace de Baire** s'il vérifie le théorème de Baire.

Corollaire 2.2.3 :

Si un espace métrique complet (E, d) s'écrit comme réunion dénombrable de fermé, alors au moins un de ces fermé est d'intérieur non vide.

plus formellement, soit (E, d) un espace métrique complet et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une famille dénombrable tel que :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

alors $\exists n \in \mathbb{N}, \overset{\circ}{u}_n \neq \emptyset$.

Preuve.

Supposons par l'absurde $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^\circ = \emptyset$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{E \setminus u_n} = E \setminus u_n^\circ = E \setminus \emptyset = E$$

donc on peut appliquer le théorème de Baire aux $E \setminus u_n = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E \setminus u_n} = E$

$$\text{or } E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \emptyset, E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E \setminus u_n, \text{ et donc : } \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E \setminus u_n} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

d'où une contradiction. ■

Corollaire 2.2.4 :

Soit (E, d) un espace métrique complet, si u_n est suite des fermés de E telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n = E$ alors $\omega = \bigcup u_n^\circ$ est un ouvert dense dans E .

Preuve.

L'ensemble Ω est ouvert en tant que réunion d'ouvert de plus on a :

$$E \setminus \Omega = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} u_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{u}_n \right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(u_n \setminus \overset{\circ}{u}_n \right)$$

les ensemble $C_n = u_n \setminus \overset{\circ}{u}_n$ sont des fermés des intérieurs vide.

donc : $E \setminus \Omega \subset \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right)$ est également d'intérieur vide d'après le théorème de Baire.

par conséquent, Ω est dense dans E . ■

Corollaire 2.2.5 :

Si (E, d) est un espace métrique complet, alors tout fermé de E est un espace de Baire, et tout ouvert de E également.

Preuve.

Un fermé de E est complet pour la distance d , donc est un espace de Baire.

Si u est un ouvert de E , on a vu qu'il existe une distance d sur u équivalente à d telle que (u, d) soit complet, donc u est un espace de Baire.

On peut aussi démontrer le résultat directement :

si (Ω_n) est une suite d'ouvert dense de A .

Alors les Ω_n sont des ouvert de E car A est ouvert dans E .

les ensembles $u_n = \Omega_n \cup (E \setminus \overline{A})$ sont donc des ouverts de E , et on vérifie sans difficulté qu'ils sont denses dans E .

En appliquant le théorème de Baire aux u_n .

On obtient que $(E \setminus \overline{A}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E , d'où on tire que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans

A .

■

2.3 Quelques applications de théorème de Baire

2.3.1 Application au fonction continue

Définition 2.3.1 :

Soit $f : E \rightarrow E'$ une application d'un espace métrique dans un autre l'oscillation de f en $x \in E$ est un outil commode pour évaluer le degré de discontinuité de f en ce point, par définition, c'est le nombre (positif ou nul).

$$\omega_f(x) = \inf_v \rho(f(v)).$$

où l'inférieur porte sur tous les voisinages v de x dans E , et où

$$\rho(f(v)) = \sup_{y,z \in v} d(f(y), f(z)).$$

est le diamètre dans E' de l'image $f(v)$.

Proposition 2.3.2 :

Soit $f : E \rightarrow E'$ une application d'un espace métrique dans un autre.

1. pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $\omega_f(x) < \varepsilon$ est un ouvert de E .
2. l'application f est continue au point x si et seulement si $\omega_f(x) = 0$ mais l'ensemble des points tels que $\omega_f(x) > \varepsilon$ n'est pas en générale un ouvert.

Preuve.

1. L'inégalité $\omega_f(x) < \varepsilon$ équivaut à l'existence d'un voisinage v de x tel que :

$$\rho(f(v)) < \varepsilon.$$

prenons $x' \in v$ alors :

v est aussi un voisinage de x , d'où

$$\omega_f(x') \leq \rho(f(v) < \varepsilon)$$

par suite v est contenue dans l'ensemble des points où l'oscillation de f est inférieure à ε .

2. La définition de la continuité de f au point x (fixé) peut s'écrire :
pour tout $\varepsilon > 0$ il existe v voisinage de x tel que :

$$\sup_{y \in v} d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Or l'inégalité triangulaire

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(x), f(z))$$

donne, en passant au sup en y et z sur v :

$$\frac{1}{2}d(f(v)) \leq \sup_{y \in v} d(f(x), f(y)) \leq d(f(v))$$

La continuité de f en x revient donc à dire que $d(f(v))$ est arbitrairement petit,
i. e : $\omega_f(x) = 0$.

■

Théorème 2.3.3 :

Une limite simple de fonctions continues sur un complet est continue sur une partie dense. De façon plus détaillée l'énoncé du théorème est : soient E, E' deux espaces métriques avec E complet, et (f_n) une suite d'application continues de E dans E' , on suppose l'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ pour chaque $x \in E$ (convergence simple sur E). alors il existe une partie dense de E sur la quelle f est continue cet étonnant résultat conséquence de théorème de Baire, montre la puissance de cet outil.

Preuve.

On va appliquer deux fois le théorème de Baire

- Pour k, n entiers, $k \geq 1$ soit :

$$F_{k,n} = \bigcap_{p,q \geq n} \left\{ x \in E, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Les applications f_p, f_q étant continues chaque ensemble $\{...\}$ est un fermé de x , donc aussi leur intersection $F_{k,n}$.

Fixons k dans un premier temps.

D'après la convergence simple sur E des f_p vers f , l'ensemble E est réunion des $F_{k,n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par suite (corollaire 2. 2. 4) la réunion des intérieurs, soit :

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{K,n}$$

est un ouvert dense de E .

- Soit $x \in \Omega_k$, par définition de cet ensemble il existe n et un voisinage v de x tel que, pour tous $p, q \geq n$ et tout $y \in v$:

$$d(f_p(y), f_q(y)) \leq \frac{1}{k}$$

D'ou, en prenant $p = n$ et faisant tend q vers l'infini,

$$d(f_n(y), f(y)) \leq \frac{1}{k}.$$

Ceci veut en particulier pour $y = x$ d'ou, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \\ &\leq \frac{2}{k} + d(f_n(x), f_n(y)). \end{aligned}$$

Comme f_n est continue en x on peut quitte à rétrécir le voisinage v , supposer que l'on a aussi

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{1}{k}.$$

Par suite tout $x \in \Omega_k$ admet un voisinage v tel que :

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$$

pour $y \in v$.

- Par une nouvelle application de Baire l'ensemble $\Omega = \bigcap_{k \geq 1} \Omega_k$ est dense dans E . pour $x \in \Omega$ et tout $k \geq 1$ il existe v voisinage de x , tel que :

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$$

c'est à dire que f est continue en x .

■

2.3.2 Application aux espaces de Banach

Théorème 2.3.4 (Banach – Steinhaus) : Soient E un espace de Banach. E' un espace normé, et $u_n : E \longrightarrow E'$ des applications linéaires continues.

1. Si la suite (u_n) est "simplement bornée". elle est uniformément bornée sur la boule unité. i.e. : bornée en norme d'application linéaire. Autrement dit : l'hypothèse.

$$\forall x \in E, \exists M_x, \forall n, \|u_n(x)\| \leq M_x$$

entraîne $\exists M \forall x \in E \forall n, \|u_n(x)\| \leq M \|x\|$

2. Une limite simple d'application linéaire continue d'un Banach dans un normé est continue. Autrement dit si chaque u_n est linéaire continue sur E . et si $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ pour chaque $x \in E$, alors u est continue sur E . De plus la condition de (1) est valable pour les u_n .

Preuve.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons :

$$F_k = \{x \in E, \forall n, \|u_n(x)\| \leq k\}.$$

- chaque F_k est fermé dans E , car les u_n sont continues.
- E est la réunion (croissante) de tous les F_k , $k \geq 0$, car $x \in F_k$ dès que $k \geq M(x)$. D'après Baire un F_k au moins contient une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ avec $r > 0$, autrement dit les applications u_n sont uniformément bornées par k sur cette boule. Il n'y a plus qu'à se ramener à la boule unité par translation et homothétie : Si $\|x\| \leq 1$, alors le point $y = a + rx$ appartient à $\overline{B}(a, r) \subset F_k$ d'où pour tout n :

$$\begin{aligned} \|u_n(x)\| &= \left\| u_n \left(\frac{y-a}{r} \right) \right\| = \frac{1}{r} \|u_n(y) - u_n(a)\| \\ &\leq \frac{2}{r} k = M. \end{aligned}$$

puisque y et a appartiennent à $\overline{B}(a, r)$. Ceci établit (1).

2. (On pourrait appliquer ici le théorème (2.3.3), mais il est plus simple de raisonner directement).

La convergence simple de u_n vers u entraîne que la suite $(u_n(x))$ est bornée pour

chaque $x \in E$.

d'après (1), il existe M tel que $\|u_n(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout n et tout x . En passant à la limite pour $n \rightarrow +\infty$, on en déduit

$$\|u(x)\| \leq M \|x\|$$

d'où la continuité de u .

■

Théorème 2.3.5 (théorème de l'application ouverte, ou des isomorphismes de Banach) :

Soient E et E' deux espaces de Banach et $u : E \rightarrow E'$.

une application linéaire continue, bijective de E sur E' . alors l'application réciproque u^{-1} est continue.

Théorème 2.3.6 (théorème du graphe fermé) :

Soient E et E' deux espaces de Banach. et $u : E \rightarrow E'$ une application linéaire alors u est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times E'$, i. e.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow 0 \text{ dans } E \\ u(x_n) \rightarrow y \text{ dans } E' \end{array} \right\} \text{entraînent } y = 0.$$

le graphe de u est $\{(x, u(x)), x \in E\} \subset E \times E'$. Dire qu'il est fermé signifie que, si (x, y) est limite d'une suite $(x_n, u(x_n))$ dans $E \times E'$, alors $y = u(x)$.

Par linéarité de u il suffit d'avoir cette propriété pour $x = 0$. Il est clair que si u est continue, son graphe est fermé.

Noter que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue, bien que son graphe soit fermé. il est vrai qu'elle n'est guère linéaire.

Preuve.

Soit $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_{E'}$ les normes de E et E' . On peut aussi munir E de la "norme du graphe"

$$\|x\| = \|x\|_E + \|u(x)\|_{E'}$$

si le graphe est fermé, l'espace E est encore un Banach pour $\|\cdot\|$.

En effet, si (x_n) est une suite de Cauchy pour la nouvelle norme elle est pour l'ancienne, d'où $x_n \rightarrow x$ dans E (ancienne norme), et $(u(x_n))$ est de Cauchy dans E' , d'où $u(x_n) \rightarrow y$ dans E' , alors $y = u(x)$ par l'hypothèse, et $x_n \rightarrow x$ au sens de la norme du graphe.

l'application $x_n \rightarrow x$ de E muni de $\|\cdot\|_E$ est bijective et continue.

par le théorème (2. 3. 5) l'application inverse est continue, il existe donc une constante M telle que :

$$\|x\|_E \leq \|x\| = \|x\|_E + \|u(x)\|_{E'} \leq M \|x\|_E$$

d'où la continuité de $u : E \rightarrow E'$ (pour les normes de départ). ■

Bibliographie

- [1] Hervé Queffélec .Topologie .
Masson .
- [2] F.Rouvière . fevrier 2004
- [3] Jean-Jacques Colin, Jean-Marie Morvan. Espace vectoriel, application linéaires Cepad
2011.
- [4] Guy Auliac-Jean-Yvescaby.Mathématique topologie et analyse.
Dunod paris 2005.
- [5] Nawfal El Hage Hassan .Topologie générale et espace normés.
Dunod paris 2011.
- [6] Walter Runder. Analyse fonctionnelle.
- [7] Mohamed Hazi. Introduction aux espace normés.