



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

INTERPRETATION PROBABILISTE DE QUELQUES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Préparé par :

- Bouzeraa Amir
- Saidi Amor

Devant le jury

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------|------------|
| - Meskine Habiba (M.A.B) | C.U.Abd Elhafid Boussouf | Président |
| - Boufelgha Nabila (M.A.A) | C.U.Abd Elhafid Boussouf | Rapporteur |
| - Benhabiles Hanane (M.A.A) | C.U.Abd Elhafid Boussouf | Examineur |

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur Madame BOUFELGHA Nabila, pour nous avoir fait travailler sur un Projet aussi intéressant et riche.

Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous a témoignée et la liberté qui nous a laissé.

Nous remercions Madame M'ESKINE Habiba ait accepté de présider le Jury de ce travail.

Nous remercions aussi Madame BENHABILES Hanane pour avoir acceptée d'examiner ce travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin au l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement.

Amir, Amor

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	iii
1 PROBABILITE GENERALE	1
1.1 Evénements et probabilités	2
1.1.1 Analyses combinatoire	2
1.1.2 Evénements	4
1.1.3 Tribu des événements	5
1.1.4 Espace probabilité	6
1.1.5 probabilité conditionnelle	9
1.1.6 Evénements indépendants	11
1.2 Variables aléatoires discrètes	13
1.2.1 Définitions	13
1.2.2 Couple de variables aléatoires discrètes	15
1.2.3 Espérance et Variance	17
1.2.4 Indépendance et covariance de deux variables aléatoires	21
1.2.5 Lois discrètes classiques	23
1.3 Variables aléatoires réelles	25
1.3.1 Densité	26
1.3.2 Espérance, variance et indépendance	27

1.3.3	Couple de variables aléatoires réelles	28
1.3.4	Lois continues classiques	31
1.4	Espérance conditionnelle	34
1.5	Fonctions caractéristiques	35
1.5.1	Lois usuelles	37
1.5.2	Fonction caractéristique d'un couple	37
2	Processus stochastique	39
2.1	processus stochastique	40
2.2	Mouvement Brownien	41
2.3	processus de poisson	43
2.4	Propriété de martingale	44
2.5	semi-groupes	45
2.6	processus de Markov	46
2.6.1	processus de Markov de saut pur	47
2.7	L'intégrale stochastique	49
2.7.1	L'intégrale de Wiener	49
2.7.2	L'intégrale stochastique générale	52
3	Interprétation probabiliste d'équations aux dérivées partielles	54
3.1	l'équation différentielle stochastique	55
3.1.1	Introduction	55
3.1.2	Equations différentielles stochastiques	57
3.2	Simulation d'équations différentielles stochastiques	67
3.3	Interprétation probabiliste	68
3.3.1	Temps d'arrêt	68
3.3.2	Mouvement brownien et laplacien	72
3.3.3	Interprétation probabiliste	72
3.3.4	Formule de Feynman-Kac	75
	Bibliographie	76

INTRODUCTION

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par un modèle mathématique, constitué souvent d'équations aux dérivées partielles (E.D.P), qui de façon remarquable ont une représentation probabiliste. Par exemple en *thermique*, la répartition stationnaire de la température u dans un milieu thermiquement conducteur est décrite par la loi de Fourier $q = -K\nabla u$ reliant le flux de chaleur q au gradient de température (K étant la conductivité thermique du milieu). La conservation de l'énergie s'exprime en fonction des sources de chaleur c par $\operatorname{div}(q) = c$, ce qui donne au final une équation de type

$$-\operatorname{div}(K\nabla u) = c.$$

Il convient d'adjoindre à cette équation des conditions aux limites du milieu $D \subset \mathbb{R}^d$ (la dimension physique est $d = 3$), imposant par exemple que la température au bord ∂D est égale à g , soit

$$u = g \text{ sur } \partial D.$$

Nous supposons ici une conductivité thermique constante K : ainsi les équations aboutissent à *l'équation de chaleur avec condition au bord de Dirichlet*

$$\frac{1}{2}\Delta u = f \text{ dans } D, u = g \text{ sur } \partial D,$$

où $f = -\frac{c}{2K}$ et où l'écriture avec le facteur $\frac{1}{2}$ est choisie par convention en vue de la représentation probabiliste qui suit.

Le but de ce mémoire de master est de donner une représentation probabiliste à la solution de quelques équations aux dérivées partielles (certains équations d'évolution), L'idée d'associer des processus de diffusion à certains équations d'évolution.

Depuis les années 50 et notamment les travaux de Kac , on sait représenter la solution $(u(x), x \in D)$ comme l'espérance d'une fonctionnelle de la trajectoire du mouvement brownien $B = (B_t)_{t \geq 0}$ partant de $x \in D$ en $t = 0$ et arrêté au premier instant τ où il touche la frontière ∂D . Cela s'écrit

$$u(x) = \mathbb{E}^x(g(B_\tau) - \int_0^\tau f(B_s)ds).$$

Cette représentation, qui porte le nom de formule de Feynman-Kac, permet alors d'évaluer ponctuellement $u(x)$ à l'aide d'un processus stochastique de diffusion.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois chapitres qui sont présenté comme suit :

Le 1^{er} chapitre, nous rappelons quelques notions de probabilité générale.

Le 2^{ème} chapitre, s'étant acclimaté aux concepts de processus stochastique.

Le 3^{ème} chapitre, on donne une représentation probabiliste de la certains équations aux dérivées partielles en terme de processus de Markov.

CHAPITRE 1

PROBABILITE GENERALE

Il est instructif de noter que l'exposition rigoureuse de la notion de probabilités n'a vu le jour que vers 1930 avec Kolmogorov, alors que la relativité restreinte et générale ont été découvertes ou plus tard en 1916. Du point de vue intuitif, on utilise l'outil probabiliste et ceci de manière très correcte depuis très long temps. Le langage de la théorie des probabilités classiques est celui de la théorie de la mesure et intégration. Notons au passage qu'il est tout à fait possible que ces probabilités classiques puissent avoir un autre langage que celui de la mesure. Une théorie satisfaisante n'a été mise au point que vers la fin du 19^e siècle avec H. Lebesgue ; celui-ci devait en effet attendre l'expression correcte du concept de borne supérieure.

Etant donné une expérience aléatoire, on lui associe l'ensemble de toutes les possibilités, ou espace échantillon, ou univers ou enfin espace fondamentale, noté Ω . Un événement sera alors associé à un sous-ensemble de Ω . Il y a des problèmes mathématiques complexes qui font que si Ω est non dénombrable (i.e. il n'existe aucune bijection entre Ω et \mathbb{N}), alors tout sous ensemble de Ω ne sera pas automatiquement un événement. Cette association est en fait bien connue en logique Mathématique et théorie des ensembles initiée par G.Boole au 19^e siècle.

1.1 Evénements et probabilités

Avant de parler des probabilités proprement dites, il faut mettre en place la notion d'événement et le vocabulaire associé.

1.1.1 Analyses combinatoire

Principe fondamentale de dénombrable

Théorème 1.1. *si une expérience peut se réaliser de n_1 façons, une deuxième de n_2 façons, ..., une $k^{\text{ème}}$ de n_k façons, alors séquence des k opérations peut se réaliser de $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ façons, $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}$.*

On peut résoudre ce problème, en utilisant une autre méthode qui est l'arbre d'étalement.

Arrangements sans répétition

- soit n objets distincts.

On appelle un arrangement une manière de sélectionner p objets parmi les n ($1 \leq p \leq n$) et de les ranger dans des boîtes numérotées de 1 à p .

- *Dans la première boîte, on peut mettre chacun des n objets. Dans seconde boîte, on peut mettre chacun des $n - 1$ objets restants, dans la troisième boîte, on peut mettre chacun des $n - 2$ objets restants et ainsi de suite. Le nombre d'arrangements possibles est donc égal à :*

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

pour $1 \leq p \leq n$.

Arrangements avec répétition

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de p objets pris parmi n , est alors :

$$AR_n^p = n^p.$$

Permutations sans répétition

- Une permutation sans répétition est un classement ordonné de n objets distincts.

Exemple 1.1. *Considérons l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Il existe 6 ($3!$) manières d'ordonner ces trois chiffres : $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.*

- Si on dispose de n objets, chacun des n objets peut être placé à la première place.
- Il reste ensuite $n - 1$ objets qui peuvent être placés à la deuxième place, puis $n - 2$ objets pour la troisième place, et ainsi de suite. Le nombre de permutations possibles de n objets distincts vaut donc $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$ ou

$$P_n = n!$$

Permutations avec répétition

Si l'on dispose de n objets appartenant à p groupes de tailles n_1, n_2, \dots, n_p , le nombre de permutations avec répétition est

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}.$$

Combinaisons sans répétition

On appelle combinaisons sans répétition de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise. Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Combinaisons avec répétition

On appelle combinaisons avec répétition de p éléments choisis parmi les n éléments. Une disposition non ordonnée de p éléments dans la quelle chaque élément peut figurer plus

qu'une :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

1.1.2 Evénements

1.1.2.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats (éventualités ou issues possibles) ne sont pas connus à priori.

L'ensemble des issues possible d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers (espace fondamental), ou espace des événements, on le not Ω .

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Rappelons que si $\text{card}(\Omega) = n$ alors $\text{card } \mathcal{P}(\Omega) = 2^n$

1.1.2.2 Evénements

C'est l'ensemble de tout les résultats caractérisés par une même propriétés lors d'une expérience aléatoire, c'est partie A de Ω .

Les événements sont représentés par des lettres majuscule : $A, B, \dots, A_1, \dots, A_p, \dots \text{etc.}$

- Evénements élémentaires :

C'est une partie de Ω qui ne contient qu'un seul élément.

Exemple 1.2. obtenir le chiffre 6 dans le cas de lancer un dé.

- Evénements composés :

C'est un ensemble des événements élémentaires.

Exemple 1.3. dans l'expérience de lancer un dé, l'événement d'avoir un chiffre pair est un événement composé de événement élémentaires sont $\{2\}, \{4\}, \{6\}$.

- Evénements contraire ou complémentaire :

De A est \bar{A} ou (C_{Ω}^A) qui contient toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A .

- événements incompatibles :

A et B deux événements incompatibles (disjoints ou distincts), s'ils ne se réalisent pas ensemble, i.e. : $A \cap B = \emptyset$.

1.1.2.3 Relations et opérations sur les événements

- Intersection d'événements :

l'intersection des événements A et B sont constitués des issues appartenant à la fois à A et B , c'est événements noté $A \cap B$ est appelé « A et B ».

- Réunion d'événements :

La réunion des événements A et B est constitué des issues A ou B , c'est événement noté $A \cup B$ est appelé « A ou B ».

- Inclusion d'événements :

Un événements A inclus dans l'événement B , si la réalisation de A implique celle de B , on dit que A inclus dans B .

- Système complet d'événements :

n événements : A_1, A_2, \dots, A_n , constituent un système complet d'événements si et seulement si A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de Ω , (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$).

1.1.3 Tribu des événements

Une famille \mathcal{F} de parties de Ω est une tribu ou (σ – algèbre) sur Ω , si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ (stabilité par passage au complémentaire),
3. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par réunion dénombrable).

-Il faut comprendre une tribu comme la quantité d'information associé à une certaine expérience aléatoire.

-Remarquons qu'une tribu contient forcément \emptyset , et reste stable par intersection dénombrable.

-Quand \mathcal{F} est une tribu sur Ω , on dit que (Ω, \mathcal{F}) est un espace mesurable.

-Un sous-ensemble $S \in \mathcal{F}$, tel que S soit aussi une σ -algèbre est appelée sous- σ -algèbre de \mathcal{F} . Soit E un espace topologique, on appelle σ -algèbre de Borel de E notée $B(E)$, la σ -algèbre engendrée par les ouverts de E i.e. la plus petites σ -algèbre contenant les ouverts de E .

Exemple 1.4. l'ensemble des sous-ensembles de Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$, est une tribu (c'est en général celle sur laquelle on travaille), l'ensemble $\{\Omega, \emptyset\}$ est également une tribu.

1.1.4 Espace probabilité

Définition 1.1. (la probabilité)

$\mathbb{P}(A)$ représente la chance qu'il a de se réaliser,

A : est un événement ,

$\mathbb{P}(A)$: est la probabilité de réaliser l'événement A .

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Définition 1.2. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable .

On appelle probabilité (ou une mesure de probabilité) toute application \mathbb{P} de \mathcal{F} dans $[0, 1]$, vérifiant les propriétés :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Si A_1, \dots, A_n, \dots sont des parties de \mathcal{F} deux à deux disjointes, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

La deuxième propriété porte le nom de σ -additivité. On utilise souvent l'écriture avec

les fonctions indicatrice :

$$\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A d\mathbb{P}.$$

Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est presque certain (Ω est alors l'événement certain).

Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est dit négligeable pour \mathbb{P} si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.

1.1.4.1 Propriétés élémentaires des probabilités

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Proposition 1.1. Soit A et B deux événements quelconques (i.e. $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$). Alors les propriétés suivantes sont toujours vraies :

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

3. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

4. Pour tout couple (A, B) d'événements compatibles,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

5. Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,
et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

6. A, B, C trois événement compatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C),$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cup C) - \mathbb{P}(B \cup C) + \mathbb{P}(A \cup B \cup C).$$

7. Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Preuve :

1. les événements A et \bar{A} sont incompatibles, donc d'après la définition d'une probabilité,

$$\mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bar{A} \cup A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

2. C'est une application directe du résultat précédent en prenant $A = \Omega$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\emptyset) &= \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega), \\ &= 1 - 1, \\ &= 0.\end{aligned}$$

3. Les événements $B \cap A$ et $B \cap \bar{A}$ sont incompatibles et de plus :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Grâce à cela, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}).$$

4. On remarque que les événements A et $B \cap \bar{A}$ sont disjoints. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}),$$

Grâce au résultat du 3., on a $\mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc on a bien :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

5. on a d'après le propriétés 4.,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ (car A et B deux événements incompatibles),

Donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

6.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)), \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)), \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \\
 &\quad \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))), \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).
 \end{aligned}$$

7. $\forall A \text{ et } B \in \mathcal{F}$

On a d'après la propriétés 3., $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$,

On a $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)$ car $(A \subseteq B)$ et $\mathbb{P}(B \cap \bar{A}) > 0$,

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Proposition 1.2. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements et soit B un événement quelconque. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

1.1.5 probabilité conditionnelle

Définition 1.3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

soient A et B deux événement de l'ensemble fondamental Ω , avec B de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(B) \neq 0$), on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B , notée $\mathbb{P}(A|B)$, la probabilité de réalisation de l'événement A sachant que l'événement B s'est réalisé, sa valeur est donnée par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

Remarque 1.1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \\ &= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}, \\ &= 1.\end{aligned}$$

Probabilité composées

A partir de la définition de la probabilité conditionnelle, on peut en déduire un résultat intéressant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B), \\ &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).\end{aligned}$$

Avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Ce résultat peut être généralisé au cas suivant :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C).\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C).\mathbb{P}(B|C).\mathbb{P}(C).$$

Probabilité totales

Si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forment un système complet de Ω alors :

$\forall A \subset \Omega$, $(A \cap B_1), \dots, (A \cap B_n)$ forment un système complet de A .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n), \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_k).\end{aligned}$$

Formule de Bayes

Si $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forment un système complet de Ω associé à une expérience aléatoire, et soit l'événement A dans Ω , on a :

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i).\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(B_1).\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2).\mathbb{P}(A|B_2) + \dots + \mathbb{P}(B_n).\mathbb{P}(A|B_n)}, \quad \forall i \in I.$$

1.1.6 Evénements indépendants

Revenons à l'urne contenant des jetons numérotés. Considérons les événements $A =$ " obtenir le jeton 1 au premier tirage " et $B =$ " obtenir le jeton 1 au deuxième tirage ". Si les tirages se font sans remise et que l'événement A est réalisé, l'événement B ne peut pas être réalisé.

Contre, si les tirages se font avec remise, le fait que l'événement A soit réalisé ou non n'influe pas sur la probabilité que B soit réalisé et vice-versa. C'est ce qu'on appelle des événements indépendants.

Proposition 1.3. Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$,
2. $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$,
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Preuve :

Elle se fait facilement par succession d'équivalence :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) &\iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A), \\ &\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \\ &\iff \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B), \\ &\iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.2. La dernière formule de la proposition reste valable si A ou B sont de probabilité nulle, ce qui n'est pas le cas des deux autres.

Définition 1.4. Deux événements A et B sont dits indépendants (noté $A \amalg B$) si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

L'indépendance possède quelques propriétés simples :

Proposition 1.4. Soit A et B deux événements. Alors on a :

1. $A \amalg A \iff \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. $A \amalg B \iff A \amalg \bar{B} \iff \bar{A} \amalg B \iff \bar{A} \amalg \bar{B}$.

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} A \amalg A &\iff \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A), \\ &\iff \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0, \\ &\iff \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1. \end{aligned}$$

2. suffit de montrer la première équivalence, les autres sont alors automatiques.

$$\begin{aligned} A \amalg B &\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \\ &\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(\bar{B})), \\ &\iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B), \\ &\iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) - \mathbb{P}(A \cap B), \\ &\iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}), \\ &\iff A \amalg \bar{B}. \end{aligned}$$

■

On peut étendre cette notion d'événements indépendants à une famille :

Définition 1.5. Une famille d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite indépendante si pour toute sous-famille finie $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n})$ de cette famille, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i_j}).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour deux événements indépendants.

Proposition 1.5. *L'indépendance d'une famille d'événements est préservée si on remplace un nombre quelconque d'entre eux par leur complémentaire.*

1.2 Variables aléatoires discrètes

On lance un dé et on regarde le résultat, qu'on note X . Ce résultat X dépend du hasard, c'est ce qu'on appelle une variable aléatoire (discrète car X ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs).

Chaque événement lié à cette expérience peut être exprimé en fonction des valeurs de X . Par exemple, l'événement A : " obtenir un résultat pair " peut s'écrire $X \in \{2, 4, 6\}$. Il suffit donc de connaître les valeurs des probabilités pour chacune des valeurs que peut prendre X pour connaître toutes les probabilités de tous les événements. Cela revient à connaître les valeurs des probabilités des événements élémentaires.

On peut voir, en fait, X comme une fonction sur les événements élémentaires. A partir de là, on peut définir d'autres notions comme la fonction de répartition, la moyenne ou la variance.

1.2.1 Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité.

Définition 1.6. *On appelle variable aléatoire discrète toute application X de Ω sur \mathbb{R} vérifiant les deux conditions suivants :*

1. *l'ensemble $\Omega_X = X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini ou fini dénombrable
i.e. $\Omega_X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$.*
2. *$\forall x_k \in \Omega_X, \mathcal{F}_k = X^{-1}(\{x_k\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\} \in \mathcal{F}$.*

Remarque 1.3. - *Les variables aléatoire sont aussi appelées (dans un autre contexte) fonction \mathcal{F} -mesurable.*

- *Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ tout fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire.*

- *L'exemple fondamental de variable aléatoire est la fonction indicatrice d'un ensemble*

$A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{1}_A : W \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } W \in A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.7. La tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur (Ω, \mathcal{F}) est l'ensemble $\sigma(X) = \{X^{-1}(A), A \in B(\mathbb{R})\}$.

Remarque 1.4. En général, on notera plus simplement $X = x_i$, l'événement ω étant sous-entendu.

Définition 1.8. On appelle loi de probabilité de X la donnée des valeurs x_i prises par X et des probabilités p_i associées :

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i).$$

Reprendre l'exemple, nous avons donc X la valeur obtenue en jetant un dé (qu'on suppose non truqué). Les valeurs que peut prendre X (i.e. les x_i) sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. chacune de ces valeurs est égale et que leur somme fait 1, on a donc :

$$p_i = \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6} \quad \forall 1 \leq i \leq 6.$$

Nous allons maintenant définir la fonction de répartition, qui est une caractérisation de la loi de probabilité.

Définition 1.9. On appelle fonction de répartition de X la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire possède des propriétés simples qui découlent de celles des lois de probabilités (donc par extension des probabilités).

Proposition 1.6. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X .

Les propriétés suivantes sont toujours vraies :

$$- F(x) = \sum_{x_i < x} \mathbb{P}(X = x_i).$$

- La fonction F est à valeurs dans $[0, 1]$.
- F croissante (car si $x < y$, $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y)$).
- Pour tout x et y réels tels que $x < y$, on a $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- Cette fonction est continue à droite et en escalier.

1.2.2 Couple de variables aléatoires discrètes

On reprend une nouvelle fois l'exemple du dé. On note Y la variable qui vaut 1 si le résultat est impair et 2 si le résultat est pair et Z la variable qui vaut 0 si le résultat est 1, 1 si le résultat est 6 et 2 sinon. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1 \wedge Z = 0) &= \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}, \\ \mathbb{P}(Y = 1 \wedge Z = 1) &= \mathbb{P}(X = \emptyset) = 0, \\ \mathbb{P}(Y = 1 \wedge Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 3 \vee X = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(Y = 2 \wedge Z = 0) &= \mathbb{P}(X = \emptyset) = 0, \\ \mathbb{P}(Y = 2 \wedge Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}, \\ \mathbb{P}(Y = 2 \wedge Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 2 \vee X = 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Définition 1.10. Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_m\}$ deux ensembles finis.

La loi d'un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) à valeurs dans $E \times F$ est caractérisée par la donnée de $E \times F$ et des $n \times m$ nombres :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i \wedge Y = y_j),$$

(noté souvent $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$) pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Remarque 1.5. *On a nécessairement*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} p_{i,j} = 1.$$

Définition 1.11. *On appelle première loi marginale (resp : deuxième loi marginale) la loi de la première composante X (resp : deuxième composante Y).*

Elle est caractérisée par les n (resp : m) nombres $p_{i.} = \mathbb{P}(X = x_i)_{i=1, \dots, n}$ (resp : $q_{.j} = \mathbb{P}(Y = y_j)_{j=1, \dots, m}$).

Il existe, comme on l'a vu dans l'exemple, des relations entre les $p_{i.}$, les $q_{.j}$ et les $p_{i,j}$.

En effet, la famille des $\{Y = y_j\}_{1 \leq j \leq m}$ forme, comme on l'a déjà vu, un système complet d'événements.

Donc, $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$p_{i.} = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^m p_{i,j},$$

De même, $\forall 1 \leq j \leq m$,

$$q_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{i,j}.$$

Donc, si on connaît la loi du couple, on connaît les lois marginales. Il suffit de faire les sommes sur les lignes et les colonnes, ce qui donne la proposition :

Proposition 1.7. *On peut retrouver les lois marginales d'un couple par les formules suivantes :*

$$p_{i.} = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \text{tq} \quad \sum_{i=1}^n p_{i.} = 1.$$

$$q_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{i,j} \quad \forall 1 \leq j \leq m, \quad \text{tq} \quad \sum_{j=1}^m p_{.j} = 1.$$

Par contre, la réciproque est en général fautive (sauf dans le cas particulier où les variables X et Y sont indépendantes, on le verra par la suite). En effet, si on regarde l'exemple ci-dessus, il ne semble pas y avoir de rapport entre $p_{i,j}$ et $(p_{i.}, q_{.j})$.

1.2.3 Espérance et Variance

Nous allons d'abord définir la notion d'espérance mathématique ou moyenne, qui représente la valeur moyenne obtenue lors d'une expérience.

Définition 1.12. On appelle espérance mathématique ou valeur moyenne de X le nombre réel $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i), \text{ tq } x_i \in X(\Omega).$$

Plus généralement, si φ est une fonction réelle, on note :

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 1.5. si on veut calculer l'espérance de X^2 , on a par définition :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^n (x_i^2) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 1.6. le lancé de dé :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^6 j \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^6 \frac{j}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Cette formule se généralise pour un couple.

Définition 1.13. Soit X et Y deux variables aléatoires.

Si φ est définie sur $E \times F$ alors :

$$\mathbb{E}(\varphi \circ (X, Y)) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \varphi(x_i, y_j) p_{i, j}.$$

Exemple 1.7.

$$\mathbb{E}(X + Y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Proposition 1.8. *L'espérance est linéaire, i.e. que pour toutes variables aléatoires X et Y et pour tout réel a , on a :*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

Preuve : *La démonstration se fait facilement par calcul :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i + y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \sum_{1 \leq j \leq m} p_{i,j} + \sum_{1 \leq j \leq m} y_j \sum_{1 \leq i \leq n} p_{i,j}, \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i p_{i.} + \sum_{1 \leq j \leq m} y_j q_{.j} = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \\ \mathbb{E}(aX) &= \sum_{1 \leq i \leq n} a x_i p_i, \\ &= a \sum_{1 \leq i \leq n} x_i p_i = a\mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

■

Il découle de cette proposition et de la définition deux autres résultats :

Proposition 1.9. *Soit X une variable aléatoire discrète, a et b deux réels. Alors*

$$\mathbb{E}(b) = b \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Preuve :

Considérons une variable aléatoire Z qui vaut b avec une probabilité de 1. Alors :

$$\mathbb{E}(b) = \mathbb{E}(Z) = b \times \mathbb{P}(Z = b) = b \times 1 = b,$$

L'autre formule découle de la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX + b) = \mathbb{E}(aX) + \mathbb{E}(b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

■

Nous allons maintenant définir un autre paramètre, la variance.

Définition 1.14. Soit $m = \mathbb{E}(X)$, on appelle variance de X le nombre positif

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = V(X) &= \mathbb{E}((X - m)^2), \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \mathbb{P}(X = x_i). \end{aligned}$$

Proposition 1.10. Il existe une formule pratique pour tout variable aléatoire X :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2,$$

Preuve :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2X\mathbb{E}(X), \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)^2, \end{aligned}$$

Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Exemple 1.8. on reprend notre exemple habituel du dé :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \\ &= \sum_{j=1}^6 j^2 \mathbb{P}(X = j) - \left(\frac{7}{2}\right)^2, \\ &= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \left(\frac{49}{4}\right), \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.

Proposition 1.11. *Si a et b sont des réels, alors on a :*

1. $V(X) \geq 0$.
2. $V(c) = 0, \forall c = \text{constant} \in \mathbb{R}$.
3. $V(aX + b) = a^2V(X), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Preuve :

1. $V(X) \geq 0$ clair.
- 2.

$$\begin{aligned} V(c) &= \mathbb{E}(c^2) - (\mathbb{E}(c))^2, \\ &= c^2 - c^2, \\ &= 0. \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \mathbb{E}((aX + b)^2) - (\mathbb{E}(aX + b))^2, \\ &= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (a\mathbb{E}(X) + b)^2, \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2(\mathbb{E}(X))^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2, \\ &= a^2(\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2), \\ &= a^2V(X). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.6. *toutes les propositions vues ici sont valables pour toute variable aléatoire X , même si elle n'est pas discrète.*

1.2.4 Indépendance et covariance de deux variables aléatoires

Définition 1.15. Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, on a $p_{i,j} = p_{i,q_j}$, i.e. :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j).$$

On le notera $X \amalg Y$.

On a un corollaire immédiat :

Corollaire 1.1. S'il existe un $1 \leq i \leq n$ et un $1 \leq j \leq m$ tels que $p_{i,j} \neq p_{i,q_j}$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. Il y a un autre corollaire immédiat :

Corollaire 1.2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Si A est une partie de $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et B une partie de $F = \{y_1, \dots, y_m\}$ alors les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Ce corollaire vient des propriétés des probabilités.

Théorème 1.2. Si X et Y sont deux variables discrètes indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Preuve :

La démonstration se fait sans difficulté par le calcul :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i \mathbb{P}(X = x_i) y_j \mathbb{P}(Y = y_j), \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) \sum_{j=1}^m y_j \mathbb{P}(Y = y_j), \\ &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.7. *la réciproque n'est pas vraie. Il existe des variables X et Y non indépendantes telles que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Définition 1.16. *On appelle covariance du couple (X, Y) le réel :*

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

On dit que les variables X et Y sont non corrélées si leur covariance est nulle.

Remarque 1.8. *On voit facilement que $\text{cov}(X, X) = V(X)$. La définition de la covariance et le théorème précédent ont comme conséquence immédiate le théorème suivant :*

Théorème 1.3. *Si X et Y sont indépendantes, elles sont non corrélées, i.e.*

$$\text{cov}(X, Y) = 0.$$

Remarque 1.9. *la réciproque est fausse. Il existe des variables non indépendantes mais dont la covariance est nulle.*

Théorème 1.4. *Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques. Alors :*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y).$$

De plus, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Proposition 1.12. *Soient X, X_1, X_2, Y, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires quelconque, a, b, c et d des réels. Alors, les propriétés suivantes sont toujours vraies :*

1. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
2. $\text{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a \text{cov}(X_1, Y) + b \text{cov}(X_2, Y)$.
3. $\text{cov}(X, cY_1 + dY_2) = c \text{cov}(X, Y_1) + d \text{cov}(X, Y_2)$.
4. $\text{cov}(aX_1 + bX_2, cY_1 + dY_2) = ac \text{cov}(X_1, Y_1) + ad \text{cov}(X_1, Y_2) + bc \text{cov}(X_2, Y_1) + bd \text{cov}(X_2, Y_2)$.

5. $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$.

Nous allons maintenant voir quelques lois classiques de variables aléatoires discrètes.

1.2.5 Lois discrètes classiques

1.2.5.1 Loi uniforme sur un ensemble fini

Définition 1.17. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

On dira que X suit une loi discrète uniforme si $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Si $x_i = i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on dira que X suit la loi uniforme discrète de paramètre n , noté $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Proposition 1.13. Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

1.2.5.2 Loi de Bernoulli

On considère une urne contenant a boules marquées A et b boules marquées B (il y a donc $a+b$ boules dans l'urne). Soit X la variable aléatoire qui vaut 0 si on tire une boule B et 1 si on tire une A . On a alors $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{a}{a+b} = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{b}{a+b} = p$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Définition 1.18. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($0 \leq p \leq 1$) si X ne prend que deux valeurs, 0 et 1, avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On le note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Proposition 1.14. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p).$$

1.2.5.3 Loi binomiale

Définition 1.19. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p (noté $X \sim b(n, p)$) si $X = \sum_{j=1}^n X_j$ où les X_j sont n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p . Dans ce cas, X prend les valeurs $0, 1, \dots, n$ avec la probabilité :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

En effet, si on tire k boules A , il y a C_n^k façons de les tirer (on ne s'intéresse pas à l'ordre) et chacune de ces boules a une probabilité p d'être tirée. Il reste les $n - k$ boules B , qui ont une probabilité $1 - p$ d'être tirée chacune. D'où la définition.

Grâce à la formule du binôme, on a bien :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Proposition 1.15. Si $X \sim b(n, p)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p).$$

Proposition 1.16. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement une loi binomiale $b(n, p)$ et $b(m, p)$ (les deux variables ont le même paramètre p). Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit une loi binomiale $b(n + m, p)$.

1.2.5.4 Loi de Poisson

Définition 1.20. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) si X prend ses valeurs dans \mathbb{N} et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 1.17. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale $b(n, p_n)$, telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ avec $\lambda > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \mathbb{P}(Y = k).$$

Où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 1.18. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda.$$

Proposition 1.19. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant les lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(a)$ et $\mathcal{P}(b)$. Alors, si X et Y sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(a + b)$

$$X \amalg Y \implies X + Y \sim \mathcal{P}(a + b).$$

1.2.5.5 Tableau récapitulatif

Loi de X	Valeurs de X	$\mathbb{P}(X = k)$	\mathbb{E}	$V(X)$
$\mathcal{U}(n)$	$\{1, 2, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	p si $k = 1$, $1 - p$ si $k = 0$	p	$p(1 - p)$
$b(n, p)$	$\{1, 2, \dots, n\}$	$C_n^k p^k (1 - p)^{(n - k)}$	np	$np(1 - p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\{1, 2, \dots, n\}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ

1.3 Variables aléatoires réelles

Commençons par un exemple, on note X la durée d'une conversation téléphonique. La variable X peut prendre n'importe quelle valeur dans \mathbb{R}_+^* . Cependant, on sent instinctivement qu'il n'y a aucune chance pour que X soit de 2 minutes exactement.

Par contre, il y a des chances que X soit comprise entre 1 minute 50 et 2 minutes 10. On dit que X est une variable aléatoire à densité, ou continue ou réelle.

1.3.1 Densité

Définition 1.21. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est une densité de probabilité si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
2. $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Définition 1.22. Soit f une densité de probabilité. On dit qu'une variable aléatoire X est de densité de probabilité f si, pour tout a et b réels tels que $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt.$$

On dit alors que X est une variable aléatoire à densité ou continue ou encore réelle (ce qu'on notera X v.a.r.).

Proposition 1.20. si X est une v.a.r., et si $a \leq b$ réels,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

Définition 1.23. On appelle fonction de répartition d'une v.a.r. X de densité f la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Proposition 1.21. Soit F la fonction de répartition d'une v.a.r. X de densité f . Alors :

1. F est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. F est croissante sur \mathbb{R} .
3. Pour tout $a \leq b$ réels, $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
5. F est continue sur \mathbb{R} .

6. F est dérivable sur \mathbb{R} , sauf en au plus un nombre dénombrable de points, et

$$F'(x) = f(x) \text{ si } F \text{ dérivable en } x.$$

1.3.2 Espérance, variance et indépendance

Définition 1.24. Soit X une v.a.r. de densité f . Si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ existe, X admet une espérance définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

De plus, si φ est une fonction réelle,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx.$$

Définition 1.25. Soit X une v.a.r. de densité f et d'espérance m . Si $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)dx$ existe, alors X admet une variance définie par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)dx = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Où

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Définition 1.26. Soit X et Y deux v.a.r, on dit que X et Y sont indépendantes (noté $X \amalg Y$) si, pour tout x et y réels,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y).$$

On peut aussi définir la covariance par $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 1.22. Soit X et Y deux v.a.r. et a et b deux réels.

Si les espérances et les variances utilisées existent, alors :

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
3. Si $X \amalg Y$, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

4. $V(aX + b) = a^2V(X)$.

5. Si $X \perp Y$, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

La démonstration de cette proposition est ci lui même démonstration dans la v.a. discrète.

1.3.3 Couple de variables aléatoires réelles

Dans tout ce partie, X et Y seront des variables aléatoires réelles de densité respective f_X et f_Y , et de fonction de répartition respective F_X et F_Y .

1.3.3.1 Densité et fonction de répartition

Comme on l'a fait pour une v.a.r., on peut définir la densité et la fonction de répartition d'un couple de v.a.r. Il suffit de passer de la dimension 1 à la dimension 2, i.e. de \mathbb{R} à \mathbb{R}^2 .

Définition 1.27. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 , à valeurs réelles. On dit que f est une densité de probabilité sur \mathbb{R}^2 si :

1. f est continue "par morceaux" sur \mathbb{R}^2 .
2. $f \geq 0$ sur \mathbb{R}^2 , $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0)$.
3. $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$.

Définition 1.28. Soit f une densité sur \mathbb{R}^2 .

On dira que le couple de v.a.r. (X, Y) a pour densité f si, pour tout couple de réels (x, y) , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du, \\ &= \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^x f(u, v) du \right) dv. \end{aligned}$$

De manière générale, quel que soit le domaine $B \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{P}((X, Y) \in B) = \iint_B f(u, v) dudv.$$

Définition 1.29. On appelle fonction de répartition du couple (X, Y) de densité f l'application définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dv \, du, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors les propriétés usuelles de la fonction de répartition, adaptées à \mathbb{R}^2 :

Proposition 1.23. La fonction de répartition F d'un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) vérifie les propriétés suivantes :

1. $F(x, y) \in [0, 1]$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. F est croissante en x et croissante en y .
3. $F(x, y) \mapsto 0$ si $x \mapsto -\infty$ ou si $y \mapsto -\infty$.
4. $F(x, y) \mapsto 1$ si $x \mapsto +\infty$ ou si $y \mapsto +\infty$.
5. F est continue sur \mathbb{R}^2 .
6. Pour tous réels $a < b$ et $c < d$, on a :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = (F(b, d) - F(b, c)) - (F(a, d) - F(a, c)).$$

1.3.3.2 Lois marginales

Il y a une nouvelle propriété des fonctions de répartition, liée aux couples de variables aléatoires réelles, qui permet d'obtenir la fonction de répartition de chaque variable du couple.

Proposition 1.24. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de fonction de répartition F . Soit F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives de X et de Y . Alors :

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad x \in \mathbb{R},$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad y \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.25. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f .

Alors X et Y ont les densités (dites marginales) suivantes :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx \quad y \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.30. Théorème de transfert

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f et φ une fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs réelles, alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u, v) f(u, v) dudv,$$

quand elle existe.

Corollaire 1.3. Soit X et Y deux v.a.r. dont les espérances existent, alors :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

1.3.3.3 Couple de v.a.r. indépendantes

On a vu, dans la partie précédent, que deux v.a.r. X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y),$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

D'où la proposition suivante, qui donne une caractérisation de l'indépendance :

Proposition 1.26. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f et de fonction de répartition F .

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \amalg Y$,
2. $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
3. $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1.27. *Soit X et Y deux v.a.r. admettant chacune une espérance. Alors, si X et Y sont indépendantes,*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y).$$

1.3.4 Lois continues classiques

1.3.4.1 Loi uniforme

Définition 1.31. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$.*

On dit qu'une v.a.r. X suit la loi uniforme sur $]a, b[$ (noté $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$) si elle a pour densité de probabilité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'analogie de la loi uniforme discrète en continue.

Proposition 1.28. *Si $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$, alors X a pour fonction de répartition :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b, \\ 1 & \text{si } b \leq x. \end{cases}$$

Proposition 1.29. *Si $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$, X admet une espérance et une variance :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

1.3.4.2 Loi exponentielle

Définition 1.32. Soit $\lambda > 0$.

On dit qu'une v.a.r. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (noté $X \sim \varepsilon(\lambda)$) si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 1.30. Si $X \sim \xi(\lambda)$, X a pour fonction de répartition la fonction :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 1.31. Si $X \sim \xi(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

1.3.4.3 Loi normale

Définition 1.33. On dit qu'une v.a.r. X suit la loi normale de paramètres 0 et 1 (noté $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$) si sa densité est la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.34. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit qu'une v.a.r. X suit une loi normale de paramètres m et σ (noté $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$) si $\frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale de paramètres 0 et 1, c'est à dire :

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma) \iff \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

On peut, à partir de la définition, calculer la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Proposition 1.32. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, X a pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.33. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors X admet une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Définition 1.35. De manière générale, on appelle écart-type d'une variable aléatoire X la racine carrée de sa variance (si elle existe) :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 1.34. Soit $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.

Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$,
i.e. :

$$X \amalg Y \Rightarrow X + Y \sim (m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Tableau récapitulatif

Loi de X	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(]a, b[)$	$\frac{1}{b-a} \quad \text{si } a < x < b$ $0 \quad \text{sinon}$	$0 \quad \text{si } x \leq a$ $\frac{x-a}{b-a} \quad \text{si } a < x < b$ $1 \quad \text{si } b \leq x$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a+b)^2}{12}$
$\xi(\lambda)$	$0 \quad \text{si } x \leq 0$ $\lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si } 0 < x$	$0 \quad \text{si } x \leq 0$ $1 - e^{-\lambda x} \quad \text{si } 0 < x$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(m, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dt$	m	σ^2

1.4 Espérance conditionnelle

Théorème 1.5. *soit S une sous-tribu de \mathcal{F} et X une variable aléatoires intégrable. Il existe une unique variable aléatoires Z S -mesurable telle que*

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(Z \mathbf{1}_A),$$

pour tout $A \in S$,

On appelle Z l'espérance conditionnelle de X sachant S et on note $Z = \mathbb{E}(X|S)$, elle est caractérisé par

$$\mathbb{E}(XG) = \mathbb{E}(ZG),$$

$\forall G$ v.a. bornée S -mesurable.

Proposition 1.35. *l'espérance conditionnelle possède les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|S)] = \mathbb{E}(X)$.
- Si X est S -mesurable, $\mathbb{E}(X|S) = X$.
- Si X est indépendante de S , $\mathbb{E}(X|S) = \mathbb{E}(X)$.
- Si S est la tribu triviale, $\mathbb{E}(X|S) = \mathbb{E}(X)$.
- Si S et H sont deux tribus tq $H \subset S$, alors $\mathbb{E}(X|H) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|S)|H] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|H)|S]$.

1.5 Fonctions caractéristiques

Définition 1.36. *Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X la fonction φ_X définie sur \mathbb{R} , à valeurs complexes, par :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En pratique, suivant les cas, la formule est différente :

-Si X est une variable discrète,

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^n e^{itx_j} \mathbb{P}(X = x_j) .$$

-Si X est une variable réelle,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Remarque 1.10. *On a vu dans les définitions précédents de l'espérance que l'espérance n'existe pas toujours. Or, dans le cas présent, on peut montrer que la fonction caractéristique est toujours définie, car :*

-Si X est une variable discrète, la somme est finie donc définie.

-Si X est une variable réelle,

$$|\varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Donc l'intégrale est uniformément convergente.

Proposition 1.36. *Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels. Alors les propriétés suivantes sont toujours vraies :*

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
2. $\varphi_X(0) = 1$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$.
5. φ_X est continue sur \mathbb{R} .

Preuve :

1. On a vu ci-dessus que c'est vrai pour les cas discrets et réels.
2. On utilise une propriété des espérances :

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}(e^{i0X}) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

3. On utilise simplement la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} \varphi_X(-t) &= \mathbb{E}(e^{-itX}), \\ &= \mathbb{E}(\overline{e^{itX}}), \\ &= \overline{\mathbb{E}(e^{itX})}, \\ &= \overline{\varphi_X(t)}. \end{aligned}$$

4. On utilise la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \varphi_{aX+b}(t) &= \mathbb{E}(e^{it(aX+b)}), \\ &= \mathbb{E}(e^{iatX+itb}), \\ &= \mathbb{E}(e^{itb} e^{itaX}), \\ &= e^{itb} \mathbb{E}(e^{i(at)X}), \\ &= e^{itb} \varphi_X(at). \end{aligned}$$

5. Si X est finie, il suffit de remarquer que φ_X est une somme finie de fonctions continues et est donc continue.

Dans les autres cas, on sait que la série ou l'intégrale converge uniformément. Comme il s'agit de série ou d'intégrale de fonctions continues, la fonction caractéristique est continue. ■

1.5.1 Lois usuelles

Nous allons maintenant calculer les fonctions de répartition des lois déjà vues, sauf celle de la loi hypergéométrique. Pour cette dernière, il faut mieux calculer "à la main" la fonction caractéristique dans chaque cas.

Proposition 1.37. Les fonctions suivantes sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$:

1. Si $X \sim \mathcal{U}(n)$, alors $\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1 - e^{itn}}{e^{-it} - 1} & \text{si } t \neq 2k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} . \\ 1 & \text{si } t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
2. Si $X \sim b(n, p)$, alors $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$.
3. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$.
4. Si $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$, alors $\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}$ si $t \neq 0$, $\varphi_X(0) = 1$.
5. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
6. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $\varphi_X(t) = e^{imt - t^2\sigma^2/2}$.

1.5.2 Fonction caractéristique d'un couple

On peut définir, pour un couple de variables aléatoires, une fonction caractéristique, comme on l'a fait pour la densité ou la fonction de répartition. Dans cette partie, on notera toujours $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires et $T = (t_1, t_2)$ un couple de \mathbb{R}^2 .

Définition 1.37. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires. On appelle fonction caractéristique de X la fonction φ définie sur \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{C} , par :

$$\varphi(T) = \varphi_X(T) = \mathbb{E}(e^{i\langle T, X \rangle}) \quad \forall T \in \mathbb{R}^2,$$

où $\langle T, X \rangle$ est le produit scalaire de \mathbb{R}^2 :

$$\langle T, X \rangle = t_1 X_1 + t_2 X_2.$$

Par exemple, si le couple X admet une densité f , en utilisant le théorème de transfert, pour tout $T \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_X(T) = \mathbb{E}(e^{i\langle T, X \rangle}) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

On peut vérifier, comme pour le cas unidimensionnel, que la fonction caractéristique d'un couple existe toujours.

On retrouve les propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques :

Proposition 1.38. Soit φ la fonction caractéristique d'un couple de variables aléatoires, les propriétés suivantes sont toujours vraies :

1. φ est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. $\varphi(0, 0) = 1$.
3. $\varphi(-T) = \overline{\varphi(T)}$ pour tout $T \in \mathbb{R}^2$.
4. $|\varphi(T)| \leq 1$ pour tout $T \in \mathbb{R}^2$.

La démonstration se fait comme dans le cas unidimensionnel.

CHAPITRE 2

PROCESSUS STOCHASTIQUE

Nous avons tous une idée plus ou moins précise de ce qu'implique le titre de ce document. " Stochastique " est un mot un peu chic pour dire " aléatoire ", ce qui évoque bien sûr l'idée des probabilités ; " processus " évoque l'idée d'un changement dans le temps. Selon le Larousse, Processus : Enchaînement ordonné de faits ou de phénomènes, répondant à un certain schéma et aboutissant à quelque chose.

De présenter dans ce chapitre les processus stochastiques, le processus de Markov, le processus de Poisson, le Mouvement Brownien et l'intégration stochastique, d'introduire au calcul stochastique et à ses outils fondamentaux elles sont principalement destinées aux étudiants.

Les propriétés de l'intégrale stochastique, en particulier la formule d'Itô, est un outil qui fonde le calcul stochastique. On présente la notion d'équation différentielle stochastique (E.D.S)(voir le prochain chapitre) à laquelle on donne un sens grâce à l'intégration stochastique. la formule d'Itô en particulier permettent de créer des liens féconds entre processus stochastiques et (E.D.P). On s'intéresse ensuite aux processus de diffusion, qui sont des solutions d'E.D.S particulières.

2.1 processus stochastique

nous aurons besoin dans ce chapitre de deux processus fondamentaux : le processus de Poisson, qui une chaîne de Markov et le Mouvement Brownien qu'est un processus de Markov.

Définition 2.1. Soit T un ensemble d'indices quelconque, dénombrable ou non. Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire $X = (X_t)_{t \in T}$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, Σ) et indicées par un paramètre t appartenant à l'ensemble T .

lorsque $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , X est également appelé suite aléatoire (et dans ce cas t et plus souvent noté n ou k) ou processus en temps discret, lorsque $T = [0, \tau]$ ou \mathbb{R}^+ , X est également appelé fonction aléatoire ou processus en temps continu. Dans le cas multidimensionnel $T = \mathbb{N}^n$ ou \mathbb{R}^n , X est également appelé champ aléatoire. Lorsque $T = \{1, \dots, n\}$ est fini alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est également appelé vecteur aléatoire.

Remarquons qu'il est possible de représenter un processus stochastique comme une application $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de deux variables, mesurable par rapport à seconde variable, avec $X(t, \omega) = X_t(\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Pour chaque t dans T , X_t est une variable aléatoire, i.e. une application mesurable de (Ω, \mathcal{F}) dans (E, Σ) . Cette application décrit les états possibles du processus pour chaque valeur t du paramètre.

Définition 2.2. (trajectoire) Soit $\omega \in \Omega$, l'application $X(., \omega) : T \rightarrow E$ qui à $t \in T$ associé $X_t(\omega)$ dans \mathbb{R} est appelée une trajectoire ou réalisation de X_t .

Un processus " càdlàg " est un processus stochastique tel que pour tout ω , les trajectoires $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont continues à droites et pourvues de limites à gauche.

Lorsque X est a trajectoires continues, on peut considérer que X est une v.a. a valeurs dans l'espace $C([0, 1[, \mathbb{R})$ (des fonctions continues de $[0, 1[$ a valeurs dans \mathbb{R}).

Définition 2.3.

- Un processus X est dit mesurable si l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable.
- Un processus X est dit continu si pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).
- Un processus est dit stationnaire si $(X_{t+s})_{t \geq 0} = (X_t)_{t \geq 0}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. En particulier, tous les X_t ont même loi.

Définition 2.4. On considère un processus stochastique en temps continue $(X_t)_{t \geq 0}$, les accroissements de ce processus sont les variables $X_t - X_s$ pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$.

Ce processus est dit à accroissements indépendants lorsque pour tout n et tout $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < +\infty$, les variables $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes. Ce processus est dit à accroissements stationnaires lorsque pour tout s et $t \geq 0$, la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t , i.e. loi $(X_{t+h} - X_t) = \text{loi}(X_h - X_0)$.

Les processus càdlàg, à accroissements indépendants et stationnaires, et issus de 0 sont appelés processus de Lévy. Le processus de Poisson et le Mouvement de Brownien (M.B.) sont des exemples de processus de Lévy.

2.2 Mouvement Brownien

Commençons d'abord par un peu d'histoire

Un peu d'histoire

Avant d'être un objet mathématique rigoureux, le Mouvement Brownien a été étudié en Botanique, en Finance, et en Physique. Le botaniste Robert Brownien observe en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Del-saux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de "mouvement au hasard".

En 1900, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse met en évidence le caractère "markovien" du Mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t+s$ dépend de sa position en t , et ne dépend pas de sa position avant t . Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du Mouvement Brownien a été développée pour la Bourse, avant de l'être pour la physique. En 1905, Einstein détermine la densité de transition du Mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le Mouvement Brownien et les équation aux dérivées partielles de type parabolique. La même année, Smoluchowski décrit le Mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoire. La première étude mathématique rigoureuse est faite par N. Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence du Brownien. P. Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoire du Brownien. Depuis, le Mouvement Brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique.

Le Mouvement Brownien

Commençons par un rappel sur les lois normales dans \mathbb{R} . Si $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$ on appelle loi normale (ou gaussienne) de moyenne m et de variance σ^2 , et on note $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la loi sur \mathbb{R} définie par la densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ (voir chapitre 1).

Si $\sigma = 0$, on prendra la masse de Dirac δ_m en m . $\mathcal{N}(0, 1)$ est la loi normale standard.

Définition 2.5. Le Mouvement Brownien (ou processus de Wiener) standard réel est le processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant :

- 1- $B_0 = 0$.
- 2- Incréments indépendant : pour tout $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s$ est indépendant de $(B_t)_{t \leq s}$.
- 3- la loi de $B_t - B_s$ est la loi normale $\mathcal{N}(0, t - s)$.

On peut considérer B_t comme une seule v.a. sur l'espace des trajectoire \mathbb{R}^+ muni de tribu cylindrique \mathcal{G} i.e. la plus petite tribu sur \mathbb{R}^+ qui rend les projections mesurables.

Plus généralement, on appelle Mouvement Brownien réel tout processus $B = (B_t)_{t \geq 0}$ vérifiant (1), (2) et la condition suivant : $B_t - B_s$ est la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2(t - s))$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

On peut montrer que le Mouvement Brownien (M.B.) est continue a l'aide du résultat suivant.

2.3 processus de poisson

Nous avons donc vu que le Mouvement Brownien est essentiellement un processus continu à accroissements indépendants et stationnaires avec $\text{var}(B_t - B_s) = t - s$. L'hypothèse "continue" a son importance. Nous introduisons maintenant le processus de Poissons (standard) $(N_t)_{t \geq 0}$ qui est prototype des processus de saut. Ce processus sert à modéliser le nombre d'appels téléphoniques dans un standard dans un laps de temps donné ou le nombre de désintégrations atomiques enregistrés dans un laps de temps donné etc...

Définition 2.6. Un processus ponctuel ou un processus de comptage est un processus N_t dont les trajectoire $t \rightarrow N_t(\omega)$ à valeurs dans \mathbb{N} sont croissantes, continues à droite nulle on 0 et dont les sont de taille 1.

On associe à un processus de comptage ses temps de sauts successifs $T_n = \inf\{t/N_t = n\}$ et les valeurs du processus entre deux sauts consécutifs $S_n = T_n - T_{n-1}$. La loi du premier temps de saut T_1 est une loi exponentielle de paramètre λ . De même, pour tout $s > 0$, la loi de premier événement après s , soit $T_{N_{s+1}} - s$, est une loi exponentielle de paramètre λ . Le processus de Poissons consiste alors à sauter d'une unité à chaque temps T_n . Voici une définition plus formelle.

Définition 2.7. Un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ (voir le chapitre 1) est un processus ponctuel qui suit une loi de Poisson de paramètre λt . Il est équivalent de dire que :

- 1- N_t est issu de 0 ($N_0 = 0$),
- 2- Pour tout réels $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$, sont indépendantes,
- 3- Pour tout s et t , $s \leq t$, $N_t - N_s$ a même loi que N_{t-s} ,
- 4- N_t suit une loi de poisson de paramètre λt ,
- 5- $\mathbb{P}^0(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.

Proposition 2.1. Soit k processus de Poisson indépendants $(N_t^i)_{t \geq 0}$ respectivement d'intensité λ_i . Alors $N_t = \sum_{i=0}^k N_t^i$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Théorème 2.1. Un processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ d'intensité λ est markovien, de matrice de transition (i.e. la probabilité que le processus soit en y sachant que instants auparavant il se trouve en x)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{xy}(t) &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!} & \text{si } y \geq x, \\ &= 0 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

2.4 Propriété de martingale

L'une des façons de voir les martingales est la généralisation de variables indépendentes centrées, il faut pour cela définir la notion de filtration.

Définition 2.8. (Filtiration naturelle) On appelle filtration naturelle d'un processus X la famille croissante de tribus $\{\mathcal{F}_t^X, T \geq 0\}$, où $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

La tribu \mathcal{F} représente l'information contenue dans le processus X entre 0 et t . Plus généralement on peut avoir besoin de mesurer des événement concernant les histoires de plusieurs processus. Il faut alors se donner une famille de tribus suffisamment riche pour contenir les histoires de tous ces processus.

Définition 2.9. (Filtiration) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, une filtration $\{\mathcal{F}_t, T \geq 0\}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F} , i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelle espace de probabilité filtré. Un processus stochastique est \mathcal{F}_t -adapté (adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable, pour tout $t \geq 0$.

\mathcal{F}_t représente maintenant toute l'information disponible à l'instant t . En particulier, tout processus est adapté à sa filtration naturelle.

Définition 2.10. Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ Un processus stochastique défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ adapté, et tel que $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty, \forall t \geq 0$. On dit que $(X_t)_{t \in T}$ est une

- \mathcal{F}_t -sous-martingale si $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s, 0 \leq s \leq t,$
- \mathcal{F}_t -sur-martingale si $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s, 0 \leq s \leq t,$
- \mathcal{F}_t martingale si $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, 0 \leq s \leq t.$

Le Mouvement Brownien (B_t) est un exemple de martingale pour sa tribu naturelle.

En effet, à cause de l'indépendance des accroissements et de leur loi, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}(B_s + (B_t - B_s)|\mathcal{F}_s^B), \\ &= B_s + \mathbb{E}(B_t - B_s), \\ &= B_s.\end{aligned}$$

On a bien pris soin de vérifier que le processus est bien intégrable, puisque $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.

En utilisant la même technique, on peut montrer que $B_t^2 - t$ est une martingale.

Le processus de Poisson défini par $N_t - \lambda t$ est une martingale centrée pour sa tribu naturelle. En effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(N_s + (N_t - N_s)|\mathcal{F}_s), \\ &= N_s + \mathbb{E}(N_t - N_s), \\ &= N_s + \lambda(t - s).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s) = N_s - \lambda s.$$

2.5 semi-groupes

Soit E un espace de Banach (i.e. est un espace vectoriel normé complet) sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} , notons par $B(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans E et par I l'unité de $B(E)$.

Définition 2.11. On dit qu'une famille $T = (T(t))_{t \geq 0} \subset B(E)$ est un semi-groupe quand

pour tout $s, t \geq 0$ $T(t+s) = T(t)T(s)$, et $T(0) = I$.

Un semi-groupe est dit

- uniformément continu quand $t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow T(t) \in B(E)$ est une application continue,
- fortement continu quand $t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow T(t)x \in E$ est une application continue pour tout $x \in E$.

Définition 2.12. On appelle C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur E une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes

1. $T(0) = I$,
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \forall x \in E$.

Définition 2.13. (*générateur infinitésimal*) On appelle *générateur infinitésimal* du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$D(A) = \{x \in E / \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\},$$

par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

2.6 processus de Markov

On considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 2.14. Un processus X sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, Σ) est appelé *processus de Markov* lorsque :

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in B | X_s, s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in B | X_t), \quad (2.1)$$

pour tout $t, h \geq 0$ et $B \in \Sigma$.

La propriété (2.1) dite de Markov, signifie que l'avenir du processus X ne dépend du

passé que par l'intermédiaire du présent ou, en d'autres termes, conditionnellement au présent, futur et passé sont indépendants.

Définition 2.15. Un processus stationnaire X sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, Σ) est appelé processus de Markov fort lorsque :

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t^X) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in A | X_t),$$

pour tout $h \geq 0$, $A \in \Sigma$, t temps d'arrêt fini et $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du processus X voir la définition de filtration naturelle.

Le Mouvement Brownien B standard et le processus de Poisson N d'intensité $\lambda \geq 0$ sont fortement Markoviens, plus précisément pour tout temps d'arrêt τ fini :

$(N_{t+\tau} - N_\tau)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ et indépendant de \mathcal{F}_τ^N .

$(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t \geq 0}$ est un Mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_τ^B .

2.6.1 processus de Markov de saut pur

Donnons d'abord quelques notions de chaînes de Markov. Nous étudions ensuite cadre général de processus de saut.

Chaîne de Markov

Les chaîne de Markov, considérées dans ce paragraphe, seront des processus en temps discret, i.e. des suites $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ de variable aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans un ensemble dénombrable d'états E , muni de la tribu formée de toutes ses parties $\mathcal{P}(E)$.

Définition 2.16. Un processus $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ à valeurs dans E est appelé chaîne de Markov si pour tout $n \geq 1$ et tout $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$ tq $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \neq 0$

$$\mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}). \quad (2.2)$$

pour tout $x \in E$.

La propriété de Markov (2.2) signifie que la loi de X_n dépend que du dernier état visité, à l'instant $n - 1$. C'est le caractère "sans mémoire" des processus de Markov, analogue des systèmes déterministes définis par des équations du type : $x_n = f(x_{n-1})$.

Le rôle de la fonction f sera joué par la matrice de transition M définie par :

$$M(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x), \quad x, y \in F.$$

Les matrices de transition, considérées dans ce paragraphe seront supposées stationnaires, i.e. indépendantes de n . La chaîne de Markov correspondante est alors dite homogène.

Processus de saut pur

Fondamentalement, supposer X_t markovien implique que les temps d'attente S_n sont indépendants et à valeurs dans \mathbb{N} et continue à droite. Un tel processus possède donc des trajectoires constantes par morceaux. Il reste sur un premier état i_1 pendant un intervalle de temps S_1 , puis saute sur un second état i_2 pendant un intervalle de temps S_2 , etc. On définit les temps d'arrêt :

$$T_0 = 0 \text{ et } T_{n+1} = \inf(t \geq T_n : X_t \neq X_{T_n}),$$

$$S_n = \begin{cases} T_n - T_{n-1} & \text{si } T_{n-1} \leq \infty, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

T_n sont les instants de saut auxquels se produisent les événements et S_n sont les temps d'attente entre deux événements. Le processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par

$$Y_n = X_{T_n},$$

est un processus en temps discret appelé chaîne incluse. on pose :

$$T_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \sum_{n \geq 1} S_n.$$

Juste avant l'instant T_∞ le processus " s'emballe " en sautant une infinité de fois, T_∞ est appelé temps d'explosion. Le processus peut se poursuivre après cet instant mais toute fois nous allons convenir que

$$X_t = +\infty, \forall t \geq T_\infty.$$

Nous dirons dans ce cas que le processus est minimal. Un processus minimal est donc entièrement caractérisé par ses temps d'attente S_1, S_2, \dots (ou ses instants de saut T_0, T_1, \dots) et pas sa chaîne incluse $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.7 L'intégrale stochastique

Dans cette section on cherche à définir des variables aléatoires du type

$$\omega \mapsto \left(\int_0^T X_s dM_s \right) (\omega), \quad (2.3)$$

où $X_t, t \geq 0$ est un certain processus et $\{M_t, t \geq 0\}$ est une martingale, par exemple un Mouvement Brownien. Le problème est bien sûr de donner un sens à l'élément différentiel dM_s puisque la fonction $s \mapsto B_s$ n'est pas dérivable. Un objet mathématique adéquat, introduit par K. Itô en (1942), est l'intégrale stochastique. Une justification de l'approche que nous allons utiliser est la remarque suivante : il est facile de donner un sens à $\int_0^T X_s dM_s$ en prenant une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Pour fixer les idées, soit $M_s = B_s$.

2.7.1 L'intégrale de Wiener

L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type (2.3) avec X fonction déterministe, i.e. ne dépendant pas de ω .

Le cas des fonctions en escalier

Si $X = f$ est une fonction en escalier, que l'on note simplement $f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$

il est très facile de définir son intégrale de Wiener par :

$$I_T(X) = \int_0^T f(s)dB_s = \sum_{i=1}^n \alpha_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Remarquons que par le caractère gaussien du Brownien et l'indépendance de ses accroissements, la variable aléatoire $I_T(f)$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$\begin{aligned} \text{Var}[I_T(f)] &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{Var}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i), \\ &= \int_0^T f^2(s)ds. \end{aligned}$$

De plus, on remarque que $f \mapsto I_T(f)$ est une fonction linéaire au sens où $I_T(af + bg) = aI_T(f) + bI_T(g)$ pour tout fonctions f, g escalier et tout $a, b \in \mathbb{R}$, enfin on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_T(f)I_T(g)] &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\text{Var}[I_T(f) + I_T(g)] - \text{Var}[I_T(f)] - \text{Var}[I_T(g)] \right), \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\int_0^T (f+g)^2(s)ds - \int_0^T f^2(s)ds - \int_0^T g^2(s)ds \right), \\ &= \int_0^T f(s)g(s)ds. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité très importante et signifie que l'application $f \mapsto I_T(f)$ est une isométrie de $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$. On parle alors de la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener, ce qui signifie

$$\langle I_T(f), I_T(g) \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Le cas général

Pour construire $I_T(f)$ quand f est un élément quelconque de $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ on utilise l'isométrie mise en place et les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1. Soit $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$. Il existe une suite de fonction en escalier $\{f_n, n \geq 0\}$ telle que $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Lemme 2.2. Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variable gaussiennes $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ convergeant vers une v.a. x dans $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ (soit telle que $\mathbb{E}[|X - X_n|^2] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$). Alors, $\mu_n \rightarrow \mu$ et $\sigma_n \rightarrow \sigma$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ et soit, d'après le lemme (2.1) précédent, $\{f_n, n \geq 0\}$ une suite de fonction en escalier telle que $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. D'après le paragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I_T(f_n)$ qui sont des gaussiennes centrées qui, par isométrie forment une suite de Cauchy. L'espace $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ étant complet, cette suite converge vers une v.a. gaussienne notée $I_T(f)$. Par le lemme (2.2), $I_T(f) \sim \mathcal{N}(0, \|f\|)$.

L'application $I_T(f)$ est linéaire et isométrique de $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$, ou sens où $I_T(af + bg) = aI_T(f) + bI_T(g)$ et $\mathbb{E}[I_T(f)I_T(g)] = \int_0^T f(s)g(s)ds$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$. En fin $I_T(f)$ est une variable gaussienne mesurable qui vérifie pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_T(f)B_t] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(s)dB_s\right)\left(\int_0^T \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(s)dB_s\right)\right], \\ &= \int_0^T f(s)\mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(s)ds, \\ &= \int_0^T f(s)ds \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de la formule d'isométrie. Par propriété d'espace gaussienne, cette formule caractérise l'intégrale stochastique : $I_T(f)$ est l'unique v.a. Z gaussienne mesurable telle que $\mathbb{E}[Z B_t] = \int_0^T f(s)ds$ pour tout $t \in [0, T]$.

2.7.2 L'intégrale stochastique générale

On cherche maintenant à définir la v.a.

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aléatoire de θ va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener. On note \mathcal{F}_t^B , $t \geq 0$ la filtration naturelle du Mouvement Brownien .

Comme dans le cas l'intégrale de Wiener, la construction de $I_t(\theta)$ se fait par discrétisation :

Cas des processus étagés

Ce sont les processus du type

$$\theta_t = \sum_{i=1}^n \theta_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et $\theta_i \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ pour tout $i = 0 \dots n$. On définit alors

$$I_t(\theta_t) = \int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=1}^n \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

et on vérifie que

$$\mathbb{E}[I_t(\theta_t)] = 0,$$

et

$$\text{Var}[I_t(\theta_t)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s)^2 ds\right].$$

Cependant, on prendra garde que par le caractère aléatoire de θ_t , la variable $I_t(\theta_t)$ n'est pas une Gaussienne en général.

Cas général

Le principe est le même que pour l'intégrale de Wiener, mais les outils mathématiques sous-jacents plus compliqués que les lemmes hilbertien et gaussien du paragraphe précédent. Si θ est un bon processus, on montre d'abord qu'il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ suite de

processus étagés telle que $\mathbb{E}[\int_0^t (\theta - \theta_s^n)^2 ds] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, puis que pour tout $t > 0$ il existe une v.a. $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que $\mathbb{E}[(I_t(\theta) - I_t(\theta^n))^2] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, avec $I_t(\theta^n)$ défini comme au paragraphe précédent. On pose alors naturellement

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s,$$

pour tout $t > 0$.

CHAPITRE 3

INTERPRÉTATION PROBABILISTE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Le but de ce chapitre est de montrer les liens qui peuvent exister entre la théorie des processus stochastique et les équations aux dérivées partielles (E.D.P).

On va se contenter de donner une représentation probabiliste à la solution des ces équation. Les processus stochastiques utilisés sont des processus possédant la propriété de Markov.

L'idée principale est de montrer que l'espérance mathématique de fonctionnelles de ces processus fournit une représentation probabiliste de solutions de certaines équation. Nous donnons les outils nécessaires pour cette présentation, les processus de diffusions obtenues comme solutions d'équations différentielles stochastiques à partir du processus de Wiener. Ces diffusions nous permettent, de représenter les solutions d'E.D.P du second ordre, nous exprimons ici les solutions d'E.D.P du second ordre paraboliques avec divers types de conditions aux bords, comme espérances de fonctionnelles de processus de Markov correctement choisis. Nous étudions d'abord l'exemple le plus simple des dérivées partielles

linéaires, l'équation de la chaleur ensuite les techniques de martingales, qui conduisent à la généralisation connue sous le nom d'équations de Feynman-Kac.

Pour cela, commençons par donner quelques résultats sur les propriétés des équations différentielles stochastiques (E.D.S)

3.1 l'équation différentielle stochastique

3.1.1 Introduction

3.1.1.1 Motivations

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons, pour $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ champ vectoriel régulier, l'équation différentielle ordinaire (E.D.O) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = b(x(t)) , t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

La solution, si elle est unique, est représentée par une trajectoire

$$x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dans la plupart des applications où une telle (E.D.O) intervient, les trajectoires mesurées expérimentalement ne sont que rarement conformes aux solutions analytiques de l'équation. Des effets aléatoires viennent se superposer à la trajectoire idéale, et il semble donc raisonnable de modifier (3.1) en y introduisant un processus aléatoire perturbant le système. Formellement, la modification s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = b(X_t) + K(X_t)\xi(t) , t > 0, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un "bruit blanc" m - dimensionnel.

Cette approche soulève les problèmes suivants :

-définir ξ de manière rigoureuse.

-en déduire l'influence de ξ dans la résolution de (3.1).

-montrer que (3.1) a une solution, discuter de l'unicité, du comportement asymptotique, du rôle de K , de x_0 ...

Considérons tout d'abord le cas $m = n$, $x_0 = 0$, $b = 0$ et $K = I$. La solution de (3.1) est le processus de Wiener n -dimensionnel ou Mouvement Brownien, noté B .

(3.2) implique alors que :

$$\frac{dB}{dt}(t) = \xi(t),$$

et le "bruit blanc" est alors la dérivée temporelle du processus de Wiener. Dans le cas général, (3.2) peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + K(X_t)dB_t, & t > 0, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

et l'équation obtenue alors est une équation différentielle stochastique. X est solution de (3.3) si et seulement si

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t K(X_s)dB_s, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

X est donc défini à l'aide intégrales stochastiques (voir page 49) .

Les questions soulevées dans le paragraphe précédent sont loin d'être triviales, et différentes réponses peuvent y être apportées, amenant des solutions de (3.3) bien différentes. Comme nous le verrons, ceci est dû aux subtilités introduites dans le calcul stochastique, et nous introduisons ici rapidement un exemple pour illustrer ce propos.

Formule d'Itô

Si $n = 1$ et si X vérifie :

$$dX = b(X)dt + dB.$$

On se pose la question suivante : pour $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, quelle équation différentielle stochastique satisfait $Y(t) = u(X(t))$, $t > 0$?

Si l'on dérive suivant la méthode déterministe classique, on s'attend à écrire

$$dY = u'dX = u'bdt + u'dB,$$

ce qui amène un résultat faux, puisque nous verrons qu'en fait $dB \approx (dt)^{\frac{1}{2}}$, dans un certain sens. La dérivation de Y amène alors à un résultat, connu sous le nom de formule d'Itô :

$$dY = (u'b + \frac{1}{2}u'')dt + u'dB.$$

Exemple 3.1. La solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dY &= YdB, t > 0, \\ Y(0) &= 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

est

$$Y_t = e^{B_t - \frac{t}{2}},$$

et non pas

$$Y_t = e^{B_t}.$$

3.1.2 Equations différentielles stochastiques

3.1.2.1 Définitions et exemples

Dans la suite, on note pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, B_s, 0 < s < t)$ la σ -algèbre générée par la variable aléatoire n -dimensionnelle X_0 et l'historique du processus Brownien m -dimensionnel B jusqu'à l'instant t . X_0 et B sont supposés indépendants.

Soient de plus

$$b : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$K : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n, m}(\mathbb{R}),$$

deux fonctions, données pour $T > 0$.

Définition 3.1. Un processus stochastique $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n est solution

de l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + K(X, t)dB, \\ X_0, \end{cases}$$

si, pour $0 \leq t \leq T$:

1. X est progressivement mesurable par rapport à (\mathcal{F}_t) ,
2. $F = b(X, t) \in \mathcal{L}_n^1([0, T])$,
3. $G = K(X, t) \in \mathcal{L}_{n \times m}^2([0, T])$,
4. $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t K(X_s, s)dB$ presque sûrement pour tout $0 \leq t \leq T$.

Exemples

Exemple 1 : Si $m = n = 1$, et si f, g sont deux fonctions continues, l'unique solution de

$$\begin{cases} dX = fXdt + gXdB, \\ X_0 = 1, \end{cases}$$

est : $(\forall 0 \leq t \leq T) X_t = e^{\int_0^t (f - \frac{1}{2}g^2)ds + \int_0^t gdB}$.

Exemple 2 : prix d'action

Si P_t est le prix d'une action à l'instant t , il est possible de modéliser son évolution en supposant que $\frac{dP}{P}$, la variation relative du prix, évolue selon l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dB,$$

où μ et σ sont deux constantes appelées dérive et volatilité de l'action. Alors

$$dP = \mu P dt + \sigma P dB,$$

et par la formule d'Itô :

$$d(\log(P)) = \frac{dP}{P} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 P^2 dt}{P^2},$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB.$$

soit

$$P_t = P_0 e^{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}.$$

Exemple 3 : pont brownien

La solution de

$$\begin{cases} dX = \frac{X}{1-t}dt + dB, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

est

$$(\forall 0 \leq t < 1) \quad X_t = (1-t) \int_0^1 \frac{1}{1-s} dB,$$

et est appelée le pont brownien entre l'origine au temps 0 et au temps 1.

Exemple 4 : équation de Langevin

Une amélioration possible du mouvement brownien consiste à prendre en compte dans le mouvement des particules une force de frottement. Dans le cas monodimensionnel :

$$dX = -bXdt + \sigma dB,$$

où $b > 0$ est le coefficient de frottement, et σ est le coefficient de diffusion. X est alors la vitesse de la particule brownienne. La solution, pour X_0 indépendant du mouvement brownien, est :

$$(\forall t \geq 0) \quad X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB.$$

On remarque alors que

$$\mathbb{E}(X_t) = e^{-bt} \mathbb{E}(X_0),$$

et que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}(e^{-2bt}X_0^2 + 2\sigma e^{-bt}X_0 \int_0^t e^{-b(t-s)}dB + \sigma^2(\int_0^t e^{-b(t-s)}dB)^2), \\ &= e^{-2bt}\mathbb{E}(X_0^2) + 2\sigma e^{-bt}\mathbb{E}(X_0)\mathbb{E}(\int_0^t e^{-b(t-s)}dB) + \sigma^2 \int_0^t e^{-2b(t-s)}ds, \\ &= e^{-2bt}\mathbb{E}(X_0^2) + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt}).\end{aligned}$$

et la variance $V(X_t)$ est donnée par :

$$V(X_t) = e^{-2bt}V(X_0) + \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt}).$$

En supposant $V(X_0) < \infty$, il s'en suit que lorsque $t \rightarrow \infty$ $\begin{cases} \mathbb{E}(X_t) \rightarrow 0, \\ V(X_t) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2b}. \end{cases}$

La distribution de X_t approche $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2b})$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Ainsi, quelque soit la distribution initiale, la solution de l'équation différentielle stochastique pour des temps très grands suit approximativement une loi gaussienne centrée et de variance $\frac{\sigma^2}{2b}$, qui représente un équilibre entre la force aléatoire de perturbation dB (que nous avons appelé dans l'introduction un bruit blanc) et la force de frottement $-bX$.

Exemple 5 : Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le mouvement brownien a été construit pour modéliser le déplacement d'une particule microscopique en suspension dans un liquide, soumise à l'agitation thermique. Une critique de cette modélisation est que les accroissements sont indépendants et ne dépendent pas de la vitesse de la particule au début de chaque période. Un modèle plus approprié est alors donné par l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\begin{cases} d^2Y &= -bdY + \sigma dB, \\ Y_0 &= y_0, \quad dY_0 = y_1, \end{cases}$$

où Y_t est la position de la particule à l'instant t , y_0 et y_1 sont des variables aléatoires gaussiennes données. Si $X = dY$, le processus de vitesse satisfait l'équation de Langevin :

$$\begin{cases} dX &= -bXdt + \sigma dB, \\ X_0 &= y_1, \end{cases}$$

et la solution est alors

$$(\forall t \geq 0) X_t = e^{-bt} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB.$$

La position Y_t satisfait alors

$$(\forall t \geq 0) Y_t = Y_0 + \int_0^t X ds,$$

et on montre qu'alors :

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0) + \left(\frac{1 - e^{-bt}}{b}\right) \mathbb{E}(Y_1),$$

et

$$V(Y_t) = V(Y_0) + \frac{\sigma^2}{b^2} t + \frac{\sigma^2}{2b^3} (-3 + 4e^{-bt} - e^{-2bt}).$$

3.1.2.2 Existence et unicité de solutions

Un exemple en dimension 1

Soient $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , avec $|b'| \leq L$, et l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX &= b(X)dt + dB, \\ X_0 &= x. \end{cases}$$

Définissons $X_t^0 = x$ et

$$(\forall t \geq 0)(\forall n \geq 0) X_t^{n+1} = x + \int_0^t b(X_s^n) ds + B_t.$$

En posant

$$(\forall t \geq 0)(\forall n \geq 0) D_t^n = \max_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|,$$

on montre par récurrence que $(\forall 0 \leq t \leq T) D_t^n \leq C \frac{L^n}{n!} t^n$. En effet :

$$\begin{aligned} D_t^n &= t \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (b(X_s^n) - b(X_s^{n-1})) ds \right|, \\ &\leq L \int_0^t D_s^{n-1} ds, \\ &\leq L \int_0^t C \frac{L^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} ds \text{ par induction,} \\ &\leq C \frac{L^n}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m \geq n$:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |X_t^m - X_t^n| \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^k}{k!} T^k \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

et pour presque tout ω , $X^n(\omega)$ converge uniformément pour $0 \leq t \leq T$ vers un processus limite X , qui est solution du problème posé.

Résolution par changement de variable

Soit l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX &= b(X)dt + \sigma(X)dB, \\ X_0 &= x. \end{cases} \quad (3.6)$$

Cherchons à résoudre, pour f précisée plus bas, l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dY &= f(Y)dt + dB, \\ Y_0 &= y, \end{cases} \quad (3.7)$$

et trouvons une fonction u telle que $X = u(Y)$.

En principe, (3.7) peut être résolue par l'approche du paragraphe précédent.

En supposant que f et u sont connues, la formule d'Itô donne

$$dX = u'(Y)dY + \frac{1}{2}u''(Y)dt,$$

$$= (u'f + \frac{1}{2}u'')dt + u'dB,$$

Ainsi, X résout (3.6) à condition que

$$\begin{cases} u'(Y) & = \sigma(X) = \sigma(u(Y)), \\ u'(Y)f(Y) + \frac{1}{2}u''(Y) & = b(X) = b(u(Y)), \\ u(y) & = x. \end{cases}$$

On résout donc l'équation différentielle ordinaire pour $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dz}(z) & = \sigma(u(z)), \\ u(y) & = x, \end{cases}$$

et une fois que u est connue, on résout (3.7) pour $f(z) = \frac{1}{\sigma(u(z))} [b(u(z)) - \frac{1}{2}u''(z)]$.

Théorème d'existence et d'unicité

De la même manière que pour les équations différentielles ordinaires, il est possible d'énoncer un théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique.

Théorème 3.1. Soient $T > 0$ et

$$b : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$K : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n, m}(\mathbb{R}),$$

deux fonctions continues satisfaisant pour $L > 0$, $0 \leq t \leq T$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(a) \begin{cases} |b(x, t) - b(y, t)| \leq L|x - y|, \\ |K(x, t) - K(y, t)| \leq L|x - y|, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} |b(x, t)| \leq L(|x| + 1), \\ |K(x, t)| \leq L(|x| + 1), \end{cases}$$

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n telle que

(c) $\mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$,

(d) X_0 indépendant de B_0^+ .

où B est un Mouvement Brownien de dimension m donné.

Alors, il existe une unique solution $X \in \mathcal{L}^2([0, T])$ à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + K(X, t)dB, \\ X_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Cette solution, appelée solution forte, est de la forme :

$$(\forall i \in \{1 \dots n\}) X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(X_s, s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t K^{ij}(X_s, s)dB_s^j.$$

Remarque 3.1. le terme unique signifie que si $X, Y \in \mathcal{L}^2([0, T])$ à trajectoires continues presque sûrement satisfont (3.8), alors $\mathbb{P}(X_t = Y_t, 0 \leq t \leq T) = 1$.

Notons que les conditions (a) et (b) traduisent le fait que b et K sont localement lipschitziennes par rapport à leur première variable.

Nous énonçons enfin une propriété des solutions de l'équation (3.8).

Théorème 3.2. Sous les hypothèses du théorème précédent pour b, K, X_0 , et si de plus $\mathbb{E}(|X_0|^{2p}) \leq \infty$ pour $p > 1$, alors la solution X de

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + K(X, t)dB, \\ X_0, \end{cases}$$

satisfait

1. $\mathbb{E}(|X_t|^{2p}) \leq C_2(1 + \mathbb{E}(|X_0|^{2p}))e^{C_1 t}$,

2. $\mathbb{E}(|X_t - X_0|^{2p}) \leq C_2(1 + \mathbb{E}(|X_0|^{2p}))t^p e^{C_1 t}$,

avec C_1, C_2 constantes ne dépendant que de T, L, m, n .

Si ces estimations des moments de X semblent complexes, elles peuvent se révéler

parfois utiles, par exemple dans le cas suivant : si $K = 0$, la solution de l'équation différentielle stochastique devient solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX}{dt} = b(X, t),$$

avec condition initiale potentiellement aléatoire. Dans ce cas, la fonction $t \mapsto X_t$ est régulière si b l'est, et dans le cas contraire, si pour un $i \in \{1 \cdots n\}$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall 0 \leq t \leq T) \sum_{l=1}^m |b^{il}(x, t)|^2 > 0,$$

alors presque toutes les trajectoires $t \mapsto X_t^i$ sont nulle part différentiables pour presque tout ω . Il est cependant possible d'utiliser les estimations précédentes pour affirmer que presque toutes les trajectoires $t \mapsto X_t$ sont continues au sens de Hölder, avec pour chacune un exposant $0 < \gamma < 1/2$, à condition que pour tout $p > 1$, $\mathbb{E}(|X_0|^{2p}) \leq \infty$, ou en d'autres termes

$$(\forall s, t \in [0, T])(\exists Q > 0) |X_t - X_s| \leq Q|t - s|^\gamma.$$

3.1.2.3 Equations différentielles stochastiques linéaires

Dans le cas d'équations différentielles stochastiques linéaires, il est possible dans certains cas de donner des solutions explicites à (3.8).

Définition 3.2. L'équation différentielle stochastique

$$dX = b(X, t)dt + K(X, t)dB,$$

est **linéaire** si b et K sont de la forme

$$b(x, t) = c(t) + D(t)x, \text{ avec } c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } D : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}),$$

$$K(x, t) = E(t) + F(t)x, \text{ avec } E : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \text{ et } F : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})),$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$ est l'espace des fonctions linéaires continues de \mathbb{R}^n dans

$$\mathcal{M}_{n,m}.$$

Définition 3.3. Une équation différentielle stochastique linéaire est dite **homogène** si

❖ CHAPITRE 3. INTERPRÉTATION PROBABILISTE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

$c = E = 0$. Elle est dite **linéaire** au **sens faible** si $F = 0$.

Examinons tout d'abord le cas des équations différentielles stochastiques faiblement linéaires, et supposons tout d'abord D constante. La solution de

$$\begin{cases} dX = (c(t) + D(t)X)dt + E(t)dB, \\ X_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

est

$$X_t = e^{Dt} X_0 + \int_0^t e^{D(t-s)} (c(s)ds + E(s)dB), \quad (3.10)$$

avec

$$e^{Dt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i t^i}{i!}.$$

Plus généralement, la solution de

$$\begin{cases} dX = (c(t) + D(t)X)dt + E(t)dB, \\ X_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

est

$$X_t = \Phi(t) \left(X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s) (c(s)ds + E(s)dB) \right). \quad (3.12)$$

où Φ est la matrice fondamentale du système d'équations différentielles ordinaires $\frac{d\Phi}{dt} = D(t)$, $\Phi(0) = 1$,

au passage que (3.12) assure que X_t est gaussien, si X_0 l'est.

Remarque Si maintenant, $n = 1$, $m \geq 1$, on s'intéresse au cas des équations linéaires scalaires, et la solution de

$$\begin{cases} dX = (c(t) + D(t)X)dt + \sum_{j=1}^m (e^j(t) + f^j(t)X)dB^j, \\ X_0, \end{cases} \quad (3.13)$$

est

$$X_t = \Phi(t) \left[X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)(c(s)ds - \sum_{j=1}^m e^j(s)f^j(s)ds) \right] + \int_0^t \sum_{j=1}^m \Phi^{-1}(s)e^j(s)dB^j.$$

où

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \left(d - \sum_{j=1}^m \frac{(f^j)^2}{2}\right)ds + \int_0^t \sum_{j=1}^m f^j dB^j\right).$$

3.2 Simulation d'équations différentielles stochastiques

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques sera illustré dans la section suivante. Nous en donnons néanmoins un aperçu rapide ici. Nous verrons qu'il est possible de représenter la solution u d'une E.D.P classique à l'aide de la solution d'une équation différentielle stochastique, au moyen d'une formule du type

$$u(x, t) = \mathbb{E}(h(X_T)).$$

Pour simuler numériquement u , dont on ne peut connaître l'expression analytique, il existe donc deux possibilités : soit utiliser des méthodes classiques sans passer par la représentation ci-dessus, soit simuler numériquement X_t jusqu'au temps T , puis approcher l'espérance à l'aide de la loi des grands nombres (moyenne de M trajectoires indépendantes de (X_t)). Cette dernière technique présente un certain intérêt, sur tout lorsque la dimension de X est grande. En effet, les méthodes classiques (éléments finis, éléments frontière,...), deviennent dans ce cas vite lourdes à mettre en œuvre, et l'ordre de convergence des méthodes déterministes diminue fortement lorsque la dimension augmente, alors qu'il est possible de montrer que celui obtenu avec des méthodes stochastiques est indépendant de cette dimension.

Il s'agit donc dans la suite d'approcher numériquement

$$dX_t = b(X_t, t)dt + K(X_t, t)dB_t,$$

partant de $X_0 = x$. Pour la suite, on suppose que b et K sont homogènes, et sans restreindre le propos, que X_t est un processus à valeurs réelles. Les schémas de simulation sont alors des extensions du cas déterministe ($K = 0$).

3.3 Interprétation probabiliste

3.3.1 Temps d'arrêt

3.3.1.1 Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et \mathcal{F}_t une filtration de σ -algèbres. Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés qui seront utiles dans la suite de ce paragraphe.

Définition 3.4. Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un **temps d'arrêt** par rapport à \mathcal{F} si pour tout $t \geq 0$ $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

En d'autres termes, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\tau(\omega) \leq t$ est un ensemble \mathcal{F}_t -mesurable.

Théorème 3.3. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt par rapport à \mathcal{F} , alors :

1. $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min(\tau_1, \tau_2)$ est un temps d'arrêt,
2. $\tau_1 \vee \tau_2 = \max(\tau_1, \tau_2)$ est un temps d'arrêt.

Preuve :

En remarque que $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{\tau \leq t - \frac{1}{k}\}}_{\in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{k}} \subseteq \mathcal{F}_t}$,

on a : $\{\tau_1 \wedge \tau_2 < t\} = \{\tau_1 < t\} \cup \{\tau_2 < t\} \in \mathcal{F}_t$ et

$\{\tau_1 \vee \tau_2 < t\} = \{\tau_1 < t\} \cap \{\tau_2 < t\} \in \mathcal{F}_t$.

La notion de temps d'arrêt vient naturellement à l'esprit lors de l'étude d'équations différentielles stochastiques, lorsqu'il s'agit d'étudier des phénomènes intervenant à des intervalles de temps aléatoires.

Exemple 3.2. Soit X la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + K(X, t)dB, \\ X_0, \end{cases}$$

où K , b et X_0 satisfont les propriétés du théorème d'existence et d'unicité de X .

Théorème 3.4. Soit E un ensemble ouvert ou fermé non vide de \mathbb{R}^n . Alors

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \in E\},$$

est un temps d'arrêt, en posant $\tau = +\infty$ pour les trajectoires de X n'atteignant jamais E

Preuve :

Soit $t \geq 0$. Il s'agit de montrer que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Soit pour cela $(t_i)_{i>0}$ un sous-ensemble dense dénombrable de \mathbb{R}^{n+} . En supposant tout d'abord que E est ouvert, l'événement

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{t_i \leq t} \underbrace{\{X_{t_i} \in E\}}_{\in \mathcal{F}_{t_i} \subseteq \mathcal{F}_t},$$

appartient à \mathcal{F}_t .

En supposant maintenant que E est fermé. Soit $d(x, E)$ la distance entre un point x et E , définissons $E_n = \{x, d(x, E) < \frac{1}{n}\}$. Alors l'événement

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t_i \leq t} \underbrace{\{X_{t_i} \in E\}}_{\in \mathcal{F}_{t_i} \subseteq \mathcal{F}_t},$$

appartient à \mathcal{F}_t .

Remarque 3.2. 1. la variable aléatoire $\sigma = \sup\{t \geq 0, X_t \in E\}$, n'est en général pas

un temps d'arrêt. La justification heuristique vient du fait que l'événement $\{\sigma \leq t\}$ dépend du futur de X , et n'est donc en général par \mathcal{F}_t- mesurable.

2. "temps d'arrêt" est un terme un peu restrictif, puisque dans de nombreux exemples, X ne s'arrête pas à cet instant.

3.3.1.2 Intégrales stochastiques et temps d'arrêt

Définition 3.5. Si $G \in \mathcal{L}^2([0, T])$ et si $\tau \in [0, T]$ est un temps d'arrêt, on définit :

$$\int_0^\tau G dB = \int_0^T \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} G dB.$$

Lemme 3.1. : intégrale d'Itô avec temps d'arrêt

Si $G \in \mathcal{L}^2([0, T])$ et si $\tau \in [0, T]$ est un temps d'arrêt, alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau G dB\right) = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^\tau G dB\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau G^2 ds\right).$$

Preuve :

En effet,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\tau G dB\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \underbrace{\mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} G}_{\in \mathcal{L}^2([0, T])} dB\right) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\tau G dB\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} G dB\right)^2\right), \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^T (\mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} G)^2 dt\right), \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^\tau G^2 ds\right). \end{aligned}$$

3.3.1.3 Formule d'Itô avec temps d'arrêt

Notons encore B le Mouvement Brownien m -dimensionnel.

Si $dX = b(X, t)dt + K(X, t)dB$, alors nous avons vu que pour toute fonction u deux fois continument différentiable :

$$d(u(X_t, t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_t, t)dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X_t, t) \sum_{h=1}^m K^{ih} K^{jh} dt.$$

Sous la forme intégrale, on a aussi

$$u(X_t, t) = u(X_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^t Du.KdB,$$

avec

$$Lu = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b^i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

où

$$a^{ij} = \sum_{h=1}^m K^{ih} K^{jh},$$

et

$$Du.KdB = \sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} K^{ih} dB^h,$$

L est le **générateur**.

Pour $\omega \in \Omega$, la formule d'Itô convient pour tout $t \in [0, T]$, et en particulier pour un temps d'arrêt τ . En prenant l'espérance de la formule pour ce temps d'arrêt, on aboutit à :

$$\mathbb{E}(u(X_\tau, \tau)) = \mathbb{E}(u(X_0, 0)) + \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds\right), \quad (3.14)$$

qui permet de relier fortement, comme nous le verrons plus tard, les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles ordinaires.

3.3.2 Mouvement brownien et laplacien

Un cas important survient lorsque $X = B$, le Mouvement Brownien n - dimensionnel, dont le générateur est

$$Lu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \Delta u,$$

où Δu est le laplacien de u .

3.3.3 Interprétation probabiliste

3.3.3.1 Temps d'atteinte d'une frontière

Soit E un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière ∂E . Par la théorie des équations aux dérivées partielles, on sait qu'il existe une solution unique à l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta u = 1 & \text{sur } E, \\ u = 0 & \text{sur } \partial E. \end{cases} \quad (3.15)$$

Le but de la présente section est de trouver une représentation probabiliste de la solution de (3.15). Pour ce faire, on se donne $x \in E$ et on considère un Mouvement Brownien n -dimensionnel B à partir duquel on construit le processus stochastique $X = B + x$. On définit alors $\tau_x = \inf\{t \geq 0, X_t \notin E\}$ le temps d'atteinte du bord de E par une trajectoire de X partant de x .

Théorème 3.5. : Avec les notations précédentes :

$$(\forall x \in E) \quad u(x) = \mathbb{E}(\tau_x).$$

En particulier, $u > 0$ sur tout E .

Preuve :

On applique (3.14) avec $Lu = \frac{1}{2}\Delta u$. Pour tout $n > 0$:

$$\mathbb{E}(u(X_{\tau_x \wedge n})) = \mathbb{E}(u(X_0)) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_x \wedge n} \frac{1}{2}\Delta u(X_s) ds\right).$$

Puisque $\frac{1}{2}\Delta u = -1$ et que u est bornée, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tau_x \wedge n) < \infty$ et la variable aléatoire τ_x est intégrable. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient alors

$$u(x) = \mathbb{E}(u(X_{\tau_x})) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_x} 1 ds\right) = \mathbb{E}(u(X_{\tau_x})) + \mathbb{E}(\tau_x),$$

mais $u = 0$ sur ∂E et donc $u(X_{\tau_x}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

En remarquant que u est bornée, $\mathbb{E}(\tau_x) < \infty$ et donc presque sûrement pour tout $x \in E$, $\tau_x < \infty$. Les trajectoires du processus X , Mouvement Brownien partant de x , atteignent donc avec probabilité 1 ∂E .

Dans le cas non stationnaire, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = -\frac{1}{2}\Delta u \quad \text{sur } E \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) & = f(x) \quad \text{sur } \partial E. \end{cases} \quad (3.16)$$

C'est l'équation de la chaleur, et on peut montrer que

$$u(x, t) = \mathbb{E}(f(X_t)),$$

est solution de ce problème, si f est continue et bornée.

3.3.3.2 Représentation probabiliste de fonctions harmoniques

Soit E un domaine de \mathbb{R}^n et $g : \partial E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On démontre qu'il existe une solution unique u , de classe C^2 sur le domaine et C^1 sur sa frontière au

problème différentiel (problème de Dirichlet) :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } E, \\ u = g & \text{sur } \partial E, \end{cases} \quad (3.17)$$

u est une fonction harmonique.

Théorème 3.6. : Avec les notations précédentes, et pour X Mouvement Brownien partant de x , on a :

$$(\forall x \in E) \quad u(x) = \mathbb{E}(g(X_{\tau_x})).$$

La démonstration est identique au théorème précédent.

Donnons un exemple simple d'utilisation de ce théorème : si $\Delta u = 0$ dans un ouvert contenant la boule $B(x, r)$ centrée en x et de rayon r , alors

$$u(x) = \mathbb{E}(u(X_{\tau_x})),$$

où τ_x est le temps d'atteinte par X de la sphère $\partial B(x, r)$. Le Mouvement Brownien étant isotrope dans l'espace, on peut supposer que le terme à droite du signe égalité est la moyenne de u sur la sphère $\partial B(x, r)$, par rapport à la mesure de la surface, d'où :

$$u(x) = \frac{1}{\text{aire de } \partial B(x, r)} \int_{\partial B(x, r)} u dS,$$

qui représente la formule de la valeur moyenne pour une fonction harmonique.

3.3.3.3 Temps d'atteinte d'une partie de la frontière

Avec les mêmes notations que précédemment, on suppose de plus que la frontière de E est réunion de deux sous-ensembles disjoints, i.e. $\partial E = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

On cherche à résoudre :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } E, \\ u = 1 & \text{sur } \Gamma_1, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Théorème 3.7. : Pour tout $x \in E$, $u(x)$ est la probabilité que la trajectoire d'un Mouvement Brownien initiée en x touche Γ_1 avant Γ_2 .

Preuve :

La démonstration est évidente en appliquant le théorème précédent avec $g = 1$ sur Γ_1 et $g = 0$ sur Γ_2 .

3.3.4 Formule de Feynman-Kac

Nous étendons ici le théorème de représentation des fonctions harmoniques pour obtenir une représentation probabiliste de l'unique solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u + cu = f & \text{sur } E, \\ u = 0 & \text{sur } \partial E, \end{cases} \quad (3.18)$$

où nous supposons c, f régulières, $c \geq 0$ sur E . Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on montre que :

Théorème 3.8. : formule de Feynman-Kac

$$(\forall x \in E) \quad u(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_x} f(X_t)e^{-\int_0^t c(X_s)ds} dt\right).$$

Preuve :

Remarquons que puisque $\mathbb{E}(\tau_x) < \infty$ et $c \geq 0$ sur E , toutes les intégrales sont convergentes.

Soit $Y_t = e^{Z_t}$ pour $Z_t = -\int_0^t c(X_s)ds$.

Alors $dZ = -c(X)dt$ et la formule d'Itô donne $dY = -c(X)Ydt$. La règle du produit d'Itô permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} d(u(X)e^{Z_t}) &= (du(X))Y_t + u(X)dY_t, \\ &= \left(\frac{1}{2}\Delta u(X)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dB^i\right)Y_t + u(X)(-c(X)dt)Y_t, \end{aligned}$$

En utilisant (3.14) pour $\tau = \tau_x$ et en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}(u(X)Y_t) = \mathbb{E}(u(X_0)) + \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_x} \left[\frac{1}{2}\Delta u(X) - c(X)u(X)\right]Y_t dt\right),$$

et puisque u résout (3.18), on en déduit

$$u(x) = \mathbb{E}(u(X_0)) = \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_x} f(X)e^{-\int_0^t c(X_s)ds} dt\right),$$

il est possible d'interpréter cette formule en considérant que les particules browniennes disparaissent à des temps aléatoires σ , par exemple en étant absorbées par le milieu dans lequel elles évoluent. En supposant de plus que la probabilité de disparition dans un court intervalle de temps $[t, t+h]$ est de la forme $c(X_t)h + o(h)$, alors la probabilité de survie d'une particule jusqu'au temps t est approximativement égale à

$$(1 - c(X_{t_1})h)(1 - c(X_{t_2})h) \cdots (1 - c(X_{t_n})h),$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $h = t_{k+1} - t_k$. Lorsque $h \rightarrow 0$, cette probabilité converge vers Y_t et donc $u(x)$ peut être interprétée comme la moyenne de $f(X)$ sur toutes les trajectoires qui survivent suffisamment pour atteindre ∂E .

Dans le cas non stationnaire, le problème précédent s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = \frac{1}{2}\Delta u + cu \quad \text{sur } E \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) & = f(x) \quad \text{sur } \partial E. \end{cases} \quad (3.19)$$

On montre alors que

$$u(x, t) = \mathbb{E}(f(X_t)e^{ct}),$$

est solution de (3.19) pour c bornée, et f continue bornée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Alain. Ninet ; Probabilites , (2004).*
- [2] *Bahram Houchmandzadeh ; Les processus stochastiques. Université de Grenoble, Département de Physique, (2010).*
- [3] *C. Dellacherie et P. A. Meyer ; Probabilités et Pontentiel , (1995).*
- [4] *D. Williams ; Markov Processus and Martingales. New York, (1979).*
- [5] *E. Gobet and S. Menozzi. ; Stopped diffusion processes : boundary corrections and overshoot. Stochastic Processes and Their ApplicationsMartingales. New York, (2010).*
- [6] *E. Gobet ; Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques. Cours de l'Ecole Polytechnique, (2001).*
- [7] *J.Christophe Breton ; Calcul Stochastique. Université de Rennes 1 (2014).*
- [8] *J. P. Fouque ; Relations entre Probabilités et Equations aux Dérivée Partie. Paris, (2008).*
- [9] *Lorraine - Sophia Antipolis ; Méthodes Numériques Probabilistes pour les Equations aux Dérivées Partielles et les Mathématiques Financières. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, (2001).*
- [10] *M.J.Blanc et T.Simon ; Elément de Calcul Stochastique , (2005).*
- [11] *R. Rémi ; Processus de Lévy et Calcul Stochastique. Birkhauser. Boston, (2010).*
- [12] *S. Heinrich. ; MMultilevel Monte Carlo Methods. Springer-Verlag, (2001).*
- [13] *Vincent Barra ; Modélisation des processus aleatoires. Institut Supérieur d'informatique, de Modélisation et de leurs Applications, (2006).*

ملخص

في هذه المذكرة نريد إعطاء تمثيل إحصائي لحل معادلة الحرارة، لذلك نقوم باستخدام العملية العشوائية المركوفية. نقدم في الفصل الأول مقدمة حول الإحتمالات العامة، ثم في الفصل الثاني نقدم العمليات العشوائية كما نقوم بعرض المعادلات التفاضلية العشوائية (م.ت.ع).

الكلمات الأساسية: العملية العشوائية، العملية المركوفية، المعادلات التفاضلية العشوائية، عملية بواسون.

Résumé

Dans ce mémoire, on donne une représentation probabiliste à la solution d'une équation de la chaleur. On utilise un processus de Markov. On donne au chapitre 1 une introduction à la probabilité générale et au chapitre 2 les processus stochastiques. Une exposition d'E.D.S (Equation Différentielle Stochastique) est aussi considérée.

Mots clés: Processus stochastique, Processus Markovien, équation différentielle stochastique, Processus de Poisson.

Abstract

In this paper, we give a probabilistic representation to the solution of an equation of heat. A Markov process is used. Chapter 1 is given the general probability and in chapter 2 the stochastic processes, exposure of E.D.S (Stochastic Differential Equation) and also.

Key words: Stochastic Process, Markov Process, Stochastic Differential Equation, Poisson Process.